Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Sadržaj sveske sa vježbi iz predmeta

Uvod u linearnu algebru

(akademska 2011/2012.)

Literatura i zbirke za dodatno usavršavanje:

- Miličić, Uščumlić; Zbirka zadataka iz više matematike 1;
- Mitrinović; Matematika u obliku metodičke zbirke 1. dio;
- Stojanović; Zbirka zadataka iz matematike 1;
- Mitrinović, Mihajlović, Vasić; Linearna algebra, Polinomi, Analitička geometrija;
- Vasić i ostali; Zbirka zadataka iz algebre, prvi i drugi dio;
- Mesihović, Arslanagić; Zbirka riješenih zadataka i problema iz matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci;

(ova stranica je ostavljena prazna)

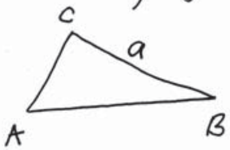
Simboli i oznake

U Matematici, mala štampana slova i mala pisana slova predstavljaju različite objekte.

Npr.

𝒶 – malo pisano slovo a u Euklidskoj geometriji predstavlja pravu

a – malo štampano slovo a u Euklidskoj geometriji predstavlja stranicu trougla



Nije dozvoljeno, u Euklidskoj geometriji, sa malim pisanim slovom označiti stranicu trougla.

Sljedeća tri simbola su različita x, 𝓍, X.

X – je veliko štampano slovo x i može označavati skup

x – je malo štampano slovo x i u algebri može označavati nepoznatu x

𝓍 – je malo pisano slovo x i u geometriji označava pravu 𝓍.

Sljedeći simboli su različiti $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, N, Q, R.

$\mathbb{N}$ čitamo debelo N

$\mathbb{Q}$ čitamo debelo Q

$\mathbb{R}$ čitamo debelo R

U matematici $\mathbb{N}$ označava skup prirodnih brojeva, $\mathbb{Q}$ označava skup racionalnih brojeva, $\mathbb{R}$ označava skup realnih brojeva, dok N, Q, R su samo velika štampana slova (koja mogu biti neki skupovi)

Simboli n i 𝓃 predstavljaju dva različita objekta.

n – predstavlja pozitivan cio broj

𝓃 – predstavlja normalu na pravu (ili duž)

(n malo štampano slovo N, 𝓃 – malo pisano slovo 𝒩)

MOD p i mod p su dvije različite oznake za dva različita pojma. Primjetite da u prvom slučaju imamo velika štampana slova a u drugom slučaju mala štampana slova

Npr.

m MOD p – označava f-ju koja daje ostatak pri dijeljenju broja m sa brojem p

m mod p – ne predstavlja ništa

$m \equiv n \pmod p$ – čitamo "m je kongruentno sa n modulo p"; predstavlja da je $m-n$ djeljivo sa p; u ovom slučaju mod je dio relacije

$m \equiv n$ (MOD p) – ne predstavlja ništa.

ZAKLJUČAK

Bilo bi poželjno da studenti pišu iste oznake koje upotrebljavaju i profesori. Drugim riječima, ako profesor za neki objekat upotrebi malo štampano slovo da i student na tom mjestu upotrebi malo štampano slovo, a ne malo pisano slovo. I slično.

Pitanje: Zašto bi se trebali ovoga pridržavati?

Skupovi

Skup je grupa objekata predstavljenih kao cjelina. Skup može sadržavati bilo koji tip objekata uključujući brojeve, simbole ili čak neke druge skupove. Objekti u skupu se zovu elementi ili članovi. Skupovi mogu biti opisani na više načina

$\{7, 21, 57\}$

$\{n \mid n = 2m \wedge m \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Simbolima $\in$ i $\notin$ označavamo da li je neki element član ili nije član skupa.

$A = B$ znači da je za svaki x, $x \in A$ akko $x \in B$

$$A = B \Leftrightarrow \forall(x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

npr. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Skup može biti konačan (npr. $\{7, 4, 33\}$) ili beskonačan (npr. $\mathbb{N}$). Pitanje: Da li je skup $\{\mathbb{N}\}$ konačan?

A je podskup od B (pišemo $A \subseteq B$) ako je svaki član od A također član od B.

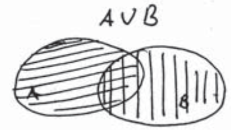
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall(x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Prazan skup označavamo sa $\emptyset$

Operacije na skupovima

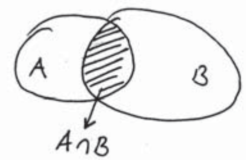
$\cup$ unija, npr. $\{a,b\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\}$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



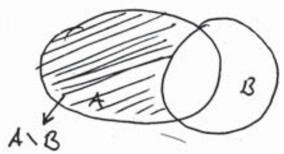
$\cap$ presjek, npr. $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



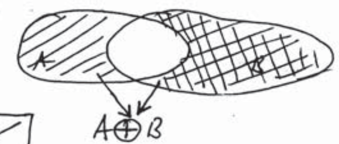
$\setminus$ razlika, npr. $\{a,b\} \setminus \{b,c\} = \{a\}$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

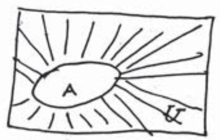


$\oplus$ simetrična razlika ili disjunktna suma, npr. $\{a,b,c\} \oplus \{c,d,e\} = \{a,b,d,e\}$

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}$$



C komplement (dopuna),



$$C(A) = \{x \mid x \notin A\}$$

npr. $\{a,b,c\}$ $\quad C(\{a,b,c\}) = \{e,f,g\}$

ako je $U = \{a,b,c,e,f,g\}$

× Dekartov proizvod,

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

(a,b) čitamo: par brojeva a i b

npr. $\{a,b\} \times \{a\} = \{(a,a),(b,a)\}$

$\mathcal{P}$ partitivni skup,

$\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$

npr. $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Pitanje: Koliko elemenata ima skup $\mathcal{P}(\{a,b\})$.

1. Dati su skupovi $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge -2 \leq x < 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x < 3\}$ i $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 5\}$

Nađi: $C(A \cap B)$, $C(A) \setminus C(A \cup B)$ i $C(A \oplus B) \cap C(B)$.

Rj. Skupovi A, B i C su konačni skupovi.

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{-1,0,1,2\}$

$U = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{-1,0,1,2,3\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 3\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{1,2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 3\}$

$C(A) = \{x \mid x \notin A\} = \{-3,-2,-1,0,4,5\} = U \setminus A$

$C(B) = \{x \mid x \notin B\} = \{-3,-2,3,4,5\}$

$C(A \cap B) = \{x \mid x \notin A \cap B\} = \{-3,-2,-1,0,3,4,5\}$ ←

$C(A \cup B) = \{x \mid x \notin A \cup B\} = \{-3,-2,4,5\}$

$C(A) \setminus C(A \cup B) = \{x \mid x \in C(A) \wedge x \notin C(A \cup B)\} = \{-1,0\}$ ←

$A \oplus B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\} = \{-1,0,3\}$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{3\}$

$B \setminus A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\} = \{-1,0\}$

$C(A \oplus B) = \{-3,-2,1,2,4,5\}$

$C(B) = \{-3,-2,3,4,5\}$

$C(A \oplus B) \setminus C(B) = \{x \mid x \in C(A \oplus B) \wedge x \notin C(B)\} = \{1,2\}$ ←

2. Dokazati da za proizvoljne skupove A, B i C važi

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Rj. uzmimo proizvoljan $x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup x \in (A \cap C)$

čime smo dokazali da je $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*)

uzmimo proizvoljan $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee$

$\vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

čime smo dokazali da je $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ (**)

(*) $\wedge$ (**) $\Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

q.e.d.

3. Dati su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$. Nađi skup $A \cap B$.

Rj. A i B su beskonačni skupovi. Napišimo elemente skupova A i B.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$

Vidimo da $A \cap B$ postoji, jer npr. 6 je element i skupa A i skupa B.

Uzmimo proizvoljan $x \in A \cap B$.

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (n \in \mathbb{N})\ x = 2n \quad \wedge \quad \exists (m \in \mathbb{N})\ x = 3m \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x je djeljiv sa 2 $\wedge$ x je djeljiv sa 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x je djeljiv sa 6 $\Rightarrow \exists (k \in \mathbb{N})\ x = 6k$

odavdje zaključujemo: $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 6k,\ k \in \mathbb{N}\}$

4. Prikazati u koordinatnom sistemu $A \times B$ ako je

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \ \vee \ 3 \leq x \leq 5\}$.

Rj. Prije nego što uradimo zadatak posmatrajmo skupove C i D koji su podskupovi od A i B tako da je $x \in \mathbb{N}$ tj.

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 2 \ \vee \ 3 \leq x \leq 5\}$

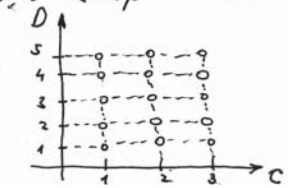
Skupovi C i D su konačni

$C = \{1, 2, 3\}$

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C \times D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5)\}$

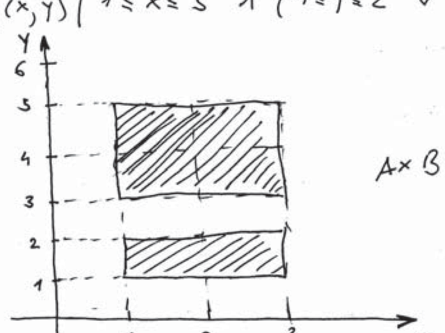
Predstavimo prvo skup $C \times D$ u koordinatnom sistemu:



tačke o predstavljaju elemente skupa $C \times D$.

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{(a,b) \mid 1 \leq a \leq 3 \wedge (1 \leq b \leq 2 \vee 3 \leq b \leq 5)\}$

$= \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 3 \wedge (1 \leq y \leq 2 \vee 3 \leq y \leq 5) \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$



Skupovi

Neki posebni skupovi

Simbol $\mathbb{N}$ (čitamo: debelo N) označava skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$$

Simbol $\mathbb{Z}^+$ (čitamo: debelo zet plus) označava skup pozitivnih cijelih

$$\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,3,4,\dots\}$$

Simbol $\mathbb{Z}$ označava skup cijelih brojeva (pozitivni, nula i negativni brojevi) $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$

Brojeve oblika $\frac{m}{n}$ gdje je $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$ i $n\neq 0$ zovemo racionalni brojevi. Skup svih racionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{Q}$ (čitamo: debelo kju).

Ispisati po pet elemenata koji se nalaze u svakom od sljedećih skupova

a) $\{n\in\mathbb{N} \mid n \text{ je djeljiv sa } 5\}$

b) $\{2n+1 \mid n\in\mathbb{P}\}$

c) $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$

d) $\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$

e) $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{P}\}$

f) $\{r\in\mathbb{Q} \mid 0<r<1\}$

g) $\{n\in\mathbb{N} \mid n+1 \text{ je prost}\}$

$\mathbb{P}$ skup prostih brojeva, 1 nije prost

Rj: a) $\{n\in\mathbb{N} \mid n \text{ je djeljiv sa } 5\}$

5, 50, 75, 100, 10 000 pet elemenata iz skupa

b) $\{2n+1 \mid n\in\mathbb{P}\}$

$\mathbb{P}$ označava skup prostih brojeva.

Za proste brojeve 2, 3, 5, 7, 107 imamo

5, 7, 11, 15, 215 pet elemenata iz skupa

c) $\mathcal{P}(A) \overset{def}{=} \{S \mid S\subseteq A\}$ partitivni skup

$\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$, $\{1\}$, $\{3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$ pet elemenata iz skupa

d) $\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$, 2, 4, 8, 256, 65 536 (za $n=16$) pet elemenata

e) $\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{P}\}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{113}$, $\frac{1}{317}$, $\frac{1}{503}$ pet elemenata iz skupa

f) $\{r\in\mathbb{Q} \mid 0<r<1\}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{17}$, $\frac{1}{20}$ pet elemenata

g) $\{n\in\mathbb{N} \mid n+1 \text{ je prost}\}$ 1, 2, 4, 16, 22, 42 šest elemenata

Ispisati sve elemenate iz sljedećih skupova

a) $\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,4\}$

b) $\{n^2-n \mid n=0,1,2,3,4\}$

c) $\{\frac{1}{n^2} \mid n\in P,\ n \text{ je parno i } n<11\}$, P skup prostih brojeva, 1 nije prost broj

d) $\{2+(-1)^n \mid n\in N\}$

Rj.

a) $\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,3,4\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

b) $\{n^2-n \mid n=0,1,2,3,4\} = \{0, 2, 6, 12\}$

c) $\{\frac{1}{n^2} \mid n\in P,\ n \text{ je parno i } n<11\} = \{\frac{1}{4}\}$

d) $\{2+(-1)^n \mid n\in N\} = \{1, 3\}$

Ispisati po pet elemenata iz svakog datog skupa.

a) Σ^* gdje je $\Sigma=\{a,b,c\}$

b) $\{w\in\Sigma^* \mid \text{dužina}(w)\le 2\}$ gdje je $\Sigma=\{a,b\}$

c) $\{w\in\Sigma^* \mid \text{dužina}(w)=4\}$ gdje $\Sigma=\{a,b\}$

Koji od skupova iznad sadrži praznu riječ λ.

Rj.

skup Σ zovemo alfabet

riječ je konačan niz slova iz Σ

Σ^* je skup svih riječi koje koriste slova iz Σ

a) aab, abcc, cbabc, ccaabbca, a

b) aa, b, ab, ba, bb

c) aabb, aaaa, baba, bbaa, bbba

prazna riječ je riječ bez slova i označavamo je sa λ ili ε

$\lambda\in\Sigma^*$ i $\lambda\in\{w\in\Sigma^* \mid \text{dužina}(w)\le 2\}$

\# Odrediti sljedeće skupove, tj. ispisati njihove elemente ako su neprazni i napisati $\emptyset$ ako su prazni.

Rj.

a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 9\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\}$

c) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 9\}$

d) $\{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n < 7\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid 3 < |n| < 7\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$

g) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 3\}$

h) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ i } x \geq 2\}$

j) $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ i } n \leq 6\}$

k) $\{n \in \mathbb{P} \mid n \leq 15\}$

$\mathbb{P}$ skup prostih brojeva

1 nije prost broj

Rj.

a) 3

b) $-3, 3$

c) $-3, 3$

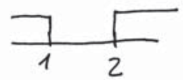
d) $4, 5, 6$

e) $-6, -5, -4, 4, 5, 6$

f) $\emptyset$

g) $\emptyset$

h) $\emptyset$

i) 

$\emptyset$

j) $4, 7, 10, 13, 16, 19$

k) $\{n \in \mathbb{P} \mid n \leq 15\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

\# Ispisati elemente sljedećih skupova ako su neprazni i napisati $\emptyset$ ako su prazni.

a) $\{n \in \mathbb{N} : n \mid 12\}$

b) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 = 0\}$

c) $\{n \in \mathbb{N} : \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\}$

d) $\{n \in \mathbb{N} : \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\}$

Rj.

a) $\{n \in \mathbb{N} : n \mid 12\}$ svi prirodni brojevi koji dijele 12

to su $1, 2, 3, 4, 6, 12$

b) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

c) $\{n \in \mathbb{N} : \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\}$

Za realan broj k, $\lfloor k \rfloor$ označava najveći cio broj koji nije veći od k

$\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = \lfloor 1{,}33 \rfloor = 1$

$\lfloor \frac{26}{3} \rfloor = \lfloor 8{,}66 \rfloor = 8$

$\lfloor \frac{23}{3} \rfloor = \lfloor 7{,}66 \rfloor = 7$

$\lfloor \frac{24}{3} \rfloor = \lfloor 8 \rfloor = 8$

$\{n \in \mathbb{N} \mid \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\} = \{24, 25, 26\}$

d) $\{n \in \mathbb{N} : \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\}$

Za $k \in \mathbb{R}$ $\lceil k \rceil$ označava najmanji cio broj koji nije manji od k

$\lceil \frac{9}{2} \rceil = \lceil 4{,}5 \rceil = 5$ $\quad \lceil \frac{15}{2} \rceil = \lceil 7{,}5 \rceil = 8$ $\quad \lceil \frac{17}{2} \rceil = \lceil 8{,}5 \rceil = 9$

$\lceil \frac{14}{2} \rceil = \lceil 7 \rceil = 7$ $\quad \lceil \frac{16}{2} \rceil = \lceil 8 \rceil = 8$

$\{n \in \mathbb{N} : \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\} = \{15, 16\}$

(#) Neka je $A = \{n \in \mathbb{N} : n \le 20\}$. Odrediti sljedeće skupove, tj. ispisati njihove elemente ako su neprazni, i napisati $\emptyset$ ako su prazni.

a) $\{n \in A : 4 | n\}$

b) $\{n \in A : n | 4\}$

c) $\{n \in A : \max\{n, 4\} = 4\}$

d) $\{n \in A : \max\{n, 14\} = n\}$

Rj.

$A = \{n \in \mathbb{N} : n \le 20\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18, 19, 20\}$

a) $4 | n$ – čitamo: 4 dijeli n

$\{n \in A : 4|n\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

b) $n | 4$ – čitamo: n dijeli 4

$\{n \in A : n|4\} = \{1, 2, 4\}$

c) $\max\{n, 4\}$ – čitamo: najveći broj između n i 4

$\{n \in A : \max\{n, 4\} = 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

d) $\{n \in A : \max\{n, 14\} = \{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

(#) Koliko elemenata imaju sljedeći skupovi? Napišite ∞ ako je skup beskonačan.

a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2\}$

b) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \le n \le 73\}$

c) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \le |n| \le 73\}$

d) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 < n < 73\}$

e) $\{n \in \mathbb{Z} :$ n je paran i $|n| \le 73\}$

f) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \le x \le 73$

g) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$

Rj.

a) 0 elemenata

b) 74 elementa (0 + svi brojevi od 1 do 73)

c) $1 \le n \le 73$ – ima 73 elementa $\Rightarrow$ $5 \le n \le 73$ ima 69 elemenata

$5 \le -n \le 73$ ima 69 elemenata

$\{n \in \mathbb{Z} : 5 \le |n| \le 73\}$ ima $2 \cdot 69 = 138$ elemenata

d) 68 elemenata

e) $n \le 72$ i n parno ima 36 elemenata $\Rightarrow$ $n \le 73$ i n parno ima 36 elemenata

$\{n \in \mathbb{Z} :$ n je parno i $|n| \le 73\}$ ima $2 \cdot 36 = 72$ elementa

f) ∞ mnogo elemenata (Između svaka dva racionalna broja postoji racionalan broj, ZAŠTO? DOKAZATI?)

g) 0 elemenata

h) 2 elementa ($-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$).

(#) Koliko elemenata imaju sljedeći skupovi? (Napišite ∞ ako je skup beskonačan).

a) $\{x \in \mathbb{R} : 0{,}99 < x < 1{,}00\}$

b) $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$

c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

d) $\{n \in \mathbb{N} : n$ je paran broj$\}$

e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ je prost$\}$

f) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ je paran i prost$\}$

g) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ je paran ili prost$\}$

Rj.

a) $0{,}99 = \frac{99 \cdot 2}{100 \cdot 2} = \frac{198}{200} < \frac{199}{200} = 0{,}995 < 1{,}00$

Između svaka dva realna broja postoji realan broj. (ZAŠTO? DOKAZATI?)

$\{x \in \mathbb{R} : 0{,}99 < x < 1{,}00\}$ ima ∞ mnogo elemenata

b) $\mathcal{P}(A) \stackrel{def}{=} \{S \mid S \subseteq A\}$

$$\underbrace{0}_{0\,1} \quad \underbrace{1}_{0\,1} \quad \underbrace{2}_{0\,1} \quad \underbrace{3}_{0\,1}$$

$\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})$ ima 2^4 elemenata (16 elemenata) ZAŠTO?

c) ∞ mnogo elemenata

d) ∞ mnogo elemenata $(2,4,6,8,\ldots)$

e) ∞ mnogo elemenata $(2,3,5,7,\ldots)$

f) 1 element (ZAŠTO?)

g) ∞ mnogo elemenata $(2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,\ldots)$

(#) Posmatrajmo sljedeća tri alfabeta: $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Sigma_2 = \{a, b, ca\}$ i $\Sigma_3 = \{a, b, Ab\}$. Odrediti u koji od skupova Σ_1^*, Σ_2^* i Σ_3^* svaka dole data riječ pripada, i odrediti njihove dužine kao članove svakog skupa kojem pripada.

a) aba b) cba c) caab

d) bAb e) cab f) baAb

Rj.

Σ je dati alfabet.
riječ je konačan niz slova iz Σ napisanih jedno pored drugog
skup svih riječi koja koriste slova iz Σ označavamo sa Σ^* (čitamo: sigma zvijezda)
svaki podskup od Σ^* zovemo jezik nad Σ

a) aba pripada u sve tri skupa Σ_1^*, Σ_2^* i Σ_3^*.
dužina ove riječi je 3 u sve tri slučaja

b) cba
ovu riječ možemo dobiti samo iz Σ_1^*.
dužina ove riječi je 3.

c) caab -ovu riječ možemo dobiti iz Σ_1^* i Σ_2^*
kao član Σ_1^* dužina ove riječi je 4
kao član Σ_2^* dužina ove riječi je 3

d) bAb -je riječ iz Σ_3^*. dužina ove riječi je 2

e) cab -je riječ iz Σ_1^* i Σ_2^*. Za Σ_1^* dužina je 3 dok za Σ_2^* dužina je 2

f) baAb -je riječ iz Σ_3^*. Dužina riječi je 3.

Zadaci za vježbu

(1.) Kolko elemenata ima u sljedećim skupovima? Napišite ∞ ako je skup beskonačan.

a) $\{-1, 1\}$
b) $[-1, 1]$
c) $(-1, 1)$
d) $\{n \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq n \leq 1\}$
e) Σ^* gdje je $\Sigma = \{a, b, c\}$
f) $\{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \leq 4\}$ gdje je $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(2.) Posmatrajmo skupove

$A = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je neparno}\}$

$B = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je prost}\}$

$C = \{4n+3 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$.

Diskutovati koji od ovih skupova je podskup od kojeg. Razmotriti svih 16 mogućnosti (npr. da li je $A \subseteq B$).

(3.) Posmatrajmo skupove $\{0, 1\}$, $(0, 1)$ i $[0, 1]$. Odgovoriti sa TAČNO ili NETAČNO.

a) $\{0, 1\} \subseteq (0, 1)$
b) $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$
c) $(0, 1) \subseteq [0, 1]$
d) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$
e) $[0, 1] \subseteq \mathbb{Z}$
f) $[0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$
g) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $\{0, 1\}$
h) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $(0, 1)$
i) $\frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ su u $[0, 1]$

(4.) Pretpostavimo da je w neprazna riječ u Σ^*.

a) ako prvo (tj. lijevo-krajnje) slovo od w izbrišemo, da li je dobijeni niz slova iz Σ^*.
b) šta je u slučaju da izbrišemo slova sa oba kraja od w? Da li su dobijeni nizovi iz Σ^*.
c) ako bi imali uređaj koji bi mogao prepoznati slova iz Σ i mogao izbrisati slova iz riječi, na koji način bi mogli koristiti taj uređaj da odredimo da li je proizvoljan niz simbola iz Σ^*?

(#) Neka je $U=\{1,2,3,4,5,\dots,12\}$, $A=\{1,3,5,7,9,11\}$, $B=\{2,3,5,7,11\}$, $C=\{2,3,6,12\}$ i $D=\{2,4,8\}$. Odrediti sljedeće skupove

a) $A\cup B$ c) $(A\cup B)\cap C^c$ e) $C\setminus D$

b) $A\cap C$ d) $A\setminus B$ f) $B\oplus D$

e) ispisati sve podskupove skupa C.

Rj.:

a) $X\cup Y \overset{def}{=} \{x \mid x\in X \text{ ili } x\in Y\}$

$A\cup B=\{1,2,3,5,7,9,11\}$

b) $X\cap Y \overset{def}{=} \{x \mid x\in X \text{ i } x\in Y\}$

$A\cap C=\{3\}$

c) $X^c \overset{def}{=} \{x\in U \mid x\notin X\}$

$$\left.\begin{array}{l} C^c=\{1,4,5,7,8,9,10,11\} \\ A\cup B=\{1,2,3,5,7,9,11\}\end{array}\right\} \Rightarrow (A\cup B)\cap C^c=\{1,5,7,9,11\}$$

d) $X\setminus Y \overset{def}{=} \{x \mid x\in X \text{ i } x\notin Y\}$

$A\setminus B=\{1,9\}$

e) $C\setminus D=\{3,6,12\}$

f) $X\oplus Y=\{x \mid \text{ili } x\in X \text{ ili } x\in Y\}$

$B\oplus D=\{3,4,5,7,8,11\}$

e) Postoji 16 podskupova skupa C...
To su... ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

(#) Neka je $A=\{1,2,3\}$, $B=\{n\in\mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je paran}\}$ i $C=\{n\in\mathbb{Z}^+ \mid n \text{ je neparan}\}$.

a) odrediti $A\cap B$, $B\cap C$, $B\cup C$, $B\oplus C$

b) ispisati sve podskupove od A

c) koji od sljedećih skupova su beskonačni?
$A\oplus B$, $A\oplus C$, $A\setminus C$, $C\setminus A$.

Rj. a)

$A=\{1,2,3\}$ $A\cap B=\{2\}$

$B=\{2,4,6,8,\dots,20,22,\dots\}$ $B\cap C=\emptyset$

$C=\{1,2,3,5,\dots,21,23,\dots\}$ $B\cup C=\mathbb{Z}^+$

$B\oplus C=\mathbb{Z}^+$

b) Podskupovi od A su
$A_1=\{1\}$, $A_2=\{2\}$, $A_3=\{3\}$, $A_4=\{1,2\}$, $A_5=\{1,3\}$,
$A_6=\{2,3\}$, $A_7=\{1,2,3\}$, $A_8=\emptyset$

Postoji 8 podskupova skupa A

c) $A\oplus B$ je beskonačan. ZAŠTO?
$A\oplus C$ je beskonačan. ZAŠTO?
$A\setminus C=\{2\}$ je konačan
$C\setminus A$ je beskonačan. ZAŠTO?

U ovom zadatku univerzalni skup je $\mathbb{R}$. Odrediti sljedeće skupove

a) $[0,3] \cap [2,6]$

b) $[0,3] \cup [2,6]$

c) $[0,3] \setminus [2,6]$

d) $[0,3] \oplus [2,6]$

e) $[0,3]^c$

f) $[0,3] \cap \emptyset$

g) $[0,\infty) \cap \mathbb{Z}$

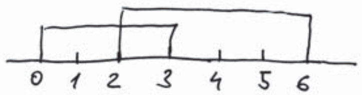
h) $[0,\infty) \cap (-\infty,2]$

i) $\left([0,\infty) \cup (-\infty,2]\right)^c$

i) $\left([0,\infty) \cup (-\infty,2]\right)^c$

Rj.

a) $[0,3] \cap [2,6] = [2,3]$



b) $[0,3] \cup [2,6] = [0,6]$

c) $[0,3] \setminus [2,6] = [0,2)$

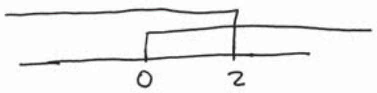
d) $[0,3] \oplus [2,6] = [0,2) \cup (3,6]$

e) $[0,3]^c = (-\infty,0) \cup (3,+\infty)$

f) $[0,3] \cap \emptyset = \emptyset$

g) $[0,\infty) \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0^+$ (pozitivni cijeli uključujući i nulu)

h) $[0,\infty) \cap (-\infty,2] = [0,2]$



i) $[0,\infty) \cup (-\infty,2] = \mathbb{R}$

$\left([0,\infty) \cup (-\infty,2]\right)^c = \mathbb{R}^c = \emptyset$

Neka je $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \geq 2\}$ i $C = \{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) \leq 2\}$.

a) Odrediti $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$ i $A \oplus C$

b) Odrediti $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$ i $B \setminus A$

c) Odrediti $\Sigma^* \setminus B$, $\Sigma \setminus B$ i $\Sigma \setminus C$.

d) Ispisati sve podskupove od Σ.

e) Kolko skupova ima u $\mathcal{P}(\Sigma)$?

Rj.

a) $A \cap C = \{a, b, aa, bb\}$ $\quad C = \{a, b, aa, ab, ba, bb\}$

$A \setminus C = \{aaa, bbb\}$

$C \setminus A = \{ab, ba\}$

$A \oplus C = \{ab, ba, aaa, bbb\}$

b) $A \cap B = \{aa, bb, aaa, bbb\}$

$B \cap C = \{aa, ab, ba, bb\}$

$B \cup C = \Sigma^*$

$B \setminus A = \{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) > 2\}$

c) $\Sigma^* \setminus B = \{w \in \Sigma^* \mid \text{dužina}(w) < 2\} = \{a, b\}$

$\Sigma \setminus B = \{a, b\}$

$\Sigma \setminus C = \emptyset$

d) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ (Σ ima 4 podskupa)

e) U $\mathcal{P}(\Sigma)$ ima četri skupa. ZAŠTO?

SKUP

1. Kantor*, osnivač teorije skupova, pojam skupa objašnjava na sljedeći način: „Izvjesni, jasno odvojeni i individualizirani objekti naše intuicije ujedinjeni u jednu cjelinu čine skup".
Skup prihvatamo kao osnovni pojam.**

2. Ako je x elemenat skupa S, onda ćemo pisati $x \in S$; u suprotnom, $x \notin S$ ili $x \operatorname{non} \in S$. U tom smislu $S = \{x | x \in S\}$, što čitamo kao „S je skup elemenata x koji imaju osobinu da x pripada skupu S". Uopštavajući takav pristup, kažemo da skup S sadrži one elemente x koji imaju svojstvo $P(x)$ $(\Leftrightarrow x \in S)$, tj. $S = \{x | P(x)\}$, što treba da znači „S je skup svih elemenata x koji imaju svojstvo $P(x)$".

3. Ako svaki elemenat skupa A pripada i skupu B, tada se kaže da je A *podskup od* B (ili da je B *nadskup* od A), što se zapisuje kao $A \subset B$ (ili $B \supset A$), tj. prema simbolima matematičke logike

$$A \subset B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

4. Jednakost skupova definiše se na sljedeći način:

$$A = B \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Ova definicija je u skladu sa $S = \{x | x \in S\}$.

5. $\emptyset$ je oznaka za *prazan skup*, tj. skup koji nema nijednog elementa. Na primjer, $\emptyset$ je skup realnih brojeva koji su rješenja jednačine $x^2 + 1 = 0$. Osim toga, za svaki skup A je $\emptyset \subset A$.
Vodeći računa o definiciji inkluzije i operacija ekvivalencije i implikacije, lako je dokazati:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A.$$

6. Neka su A i B skupovi; tada definišemo operacije nad skupovima:

6.1. *Unija skupova* A i B:

$$A \cup B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

6.2. *Presjek skupova* A i B:

$$A \cap B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

6.3. *Razlika (diferencija) skupova* A i B:

$$A \setminus B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

6.4. Ako je $A \subset I$, skup

$$A' \overset{\mathrm{Df}}{=} \{x | x \notin A \wedge x \in I\}$$

nazivamo *komplementom skupa* A u odnosu na skup I.

7. *Partitivni skup* $P(A)$ skupa A je skup svih podskupova od A, tj.

$$P(A) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{B | B \subset A\}.$$

Primjer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, tada je:

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$.

8. *Uređen par* elemenata a i b je

$$(a, b) \overset{\mathrm{Df}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\},$$

gdje se a naziva prva *koordinata* (*komponenta* ili *projekcija*) i b druga koordinata uređenog para (a, b).
Na osnovu ove definicije dokazuje se da je

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Analogno se definiše uređena n-torka

$(a_1, \ldots, a_n)$ koja se označava, takođe, sa $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

9. Neka su A i B skupovi, tada je *Dekartov* (*Kartezijev*)* *proizvod* tih skupova

$$A \times B \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}, \text{ tj.}$$

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a, b) \in A \times B.$$

Analogno, za kakav god konačan broj (ne nužno različitih skupova)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ je $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\mathrm{Df}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$.

Ako je $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, umjesto $A \times A \times \ldots \times A$ pišemo A^n.

---

* Georg Cantor (1845–1918), njemački matematičar, osnivač moderne teorije skupova.

** Teorija skupova neće ovdje biti tretirana kao formalizirana deduktivna teorija, već samo neformalno kao takozvana „klasična" ili „naivna" teorija skupova. Vidjeti o tome: Đuro Kurepa, Teorija skupova, Školska knjiga, Zagreb, 1951.

ZADACI

1. Dokazati da za operacije $\cup$, $\cap$ nad skupovima vrijedi:

a) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ (idempotentnost $\cup$ i $\cap$);
b) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (komutativnost);
c) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (asocijativnost);
d) $A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$ (apsorptivnost);
e) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (distributivnost $\cup$ prema $\cap$, tj. obratno, $\cap$ prema $\cup$);
f) zapisati distributivnost $\cap$ prema $\cap$, tj. $\cup$ prema $\cup$ i dokazati da odgovarajuće formule vrijede.

2. Dokazati De Morganove* formule:

$(A\cup B)'=A'\cap B'$, $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

3. Ako su $A, B\subset S$ i $A'=C_sA$, $B'=C_sA$, dokazati:

a) $\emptyset=S$, $S'=\emptyset$; b) $(A')'=A$; c) $A\cup A'=S$, $A\cap A'=\emptyset$;

d) $A\subset B\Leftrightarrow A'\supset B'\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A$;

e) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B'\Leftrightarrow B\subset A'$; f) $A\cup B=S\Leftrightarrow A'\subset B\Leftrightarrow B'\subset A$.

4. Dokazati (Dedekind)*:

$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$.

5. Neka je simetrična razlika skupova $A\triangle B\overset{\mathrm{Df}}{=}(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Dokazati da vrijedi:

a) $A\triangle B=B\triangle A$; b) $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$;
c) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$; d) $A\triangle\emptyset=A$, $A\triangle A=\emptyset$;
e) $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; f) $A\triangle B=[A\setminus(A\cap B)]\cup[B\setminus(A\cap B)]$;
g) Ako je $A, B, C\subset S$, vrijedi

$$(A\triangle B\triangle C)'=[(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)]\setminus(A\cap B\cap C),$$
$$=[(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)]\setminus(A\cap B\cap C),$$

(vidi prethodni zadatak).

* Richard Dedekind (1831 – 1916), njemački matematičar.
** Euklid (oko 330 – oko 275), starogrčki matematičar.

6. Ako su A, B, C, D skupovi, dokazati da je:

a) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
b) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$;
c) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;
d) $(A\times B)\setminus(C\times D)=((A\setminus C)\times B)\cup(A\times(B\setminus D))$;
e) $(A\times B)\cup(C\times D)\subset(A\cup C)\times(B\cup D)$.

7. Iz $A\triangle X=A\Rightarrow X=\emptyset$. Dokazati.

RJEŠENJA

1. Sve formule se na osnovu definicija jednakosti skupova i operacija $\cap$, $\cup$ svode na dokazivanje analognih formula u algebri sudova.

   Npr.:

   d) $x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$;

   e) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Primjedba: Uporedite ovaj zadatak sa zadatkom 1.1.3!

2. Niz ekvivalencija

   $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)' \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$ proizlazi na slijedeći način: prve dvije na osnovu definicije komplementa i unije, treća na osnovu De Morganove formule za sudove, četvrta, opet, prema definiciji komplementa i posljednja prema definiciji presjeka. Sad je, na osnovu tranzitivnosti ekvivalencije: $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$, što prema definiciji jednakosti znači da je $(A \cup B)' = A' \cap B'$.
   Druga De Morganova formula dokazuje se analogno.

3. a) $x \in \emptyset' \Leftrightarrow x \in S \ (\wedge x \notin \emptyset)$, $x \in S' \Leftrightarrow x \notin S \Leftrightarrow x \in \emptyset$;

   b) $x \in (A')' \Leftrightarrow (x \in A')' \Leftrightarrow ((x \in A)')' \Leftrightarrow x \in A$;

   c) $x \in A \cup A' \Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A \Leftrightarrow x \in S \ (A,\ A' \subset S)$,
   $x \in A \cap A' \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \Leftrightarrow x \in \emptyset$;

   d) $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Leftrightarrow B' \subset A'$;

   e) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \notin B) \Leftrightarrow A \subset B' \Leftrightarrow B \subset A' \Leftrightarrow A \subset B'$;

   f) $A \cup B = S \Leftrightarrow A' \cap B' = \emptyset \overset{e)}{\Leftrightarrow} A' \subset B \Leftrightarrow B' \subset A$.

4. Neka je $a = x \in A$, $b = x \in B$, $c = x \in C$ i formule $\alpha = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, $\beta = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$. Tada je Dedekindova formula, prema definiciji jednakosti skupova, ekvivalentna sa formulom $\alpha = \beta$ u algebri sudova.

5. a) Proizlazi iz definicije simetrične razlike na osnovu komutativnosti unije.

   b) Dokažimo prvo $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
   Postupak nastaviti kao u prethodnom zadatku.

6. a) $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge y \in C \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$
   $\Leftrightarrow (x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$, gdje niz ekvivalencija slijedi na osnovu: definicije Dekartovog proizvoda, definicije unije, distribucije $\wedge$ prema $\vee$, definicije Dekartovog proizvoda i definicije unije, respektivno.
   Slično se dokazuju i ostale formule.

7. Pretpostavimo da je $X \neq \emptyset$, tj. neka postoji $x \in X$. Tada postoje dvije mogućnosti:

   1° $x \in X \wedge x \in A \Rightarrow x \notin A \Delta X$,

   2° $x \in X \wedge x \notin A \Rightarrow x \in A \Delta X$,

   što je kontradiktorno sa $A \Delta X = A$, te pretpostavka $X \neq \emptyset$ otpada. Dakle, $X = \emptyset$.

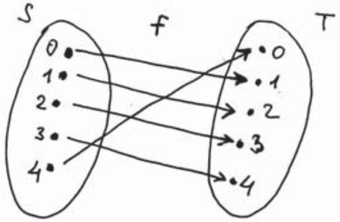
---

* Arthur Cayley (1821 – 1895), engleski matematičar.

F-je i binarne relacije

Funkcija $f: S \to T$ preslikava svaki elemenat $s \in S$ na tačno jedan element od T, kojeg označavamo sa $f(s)$.

npr.

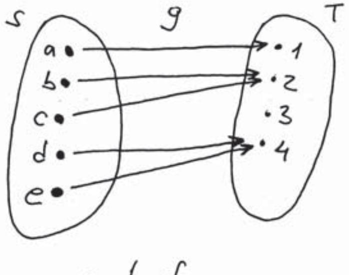


$f: \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$

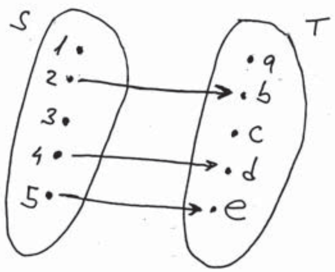
n	$f(n)$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	0

f je f-ja

Odgovoriti na pitanje da li su g i h f-je?



g jest f-ja



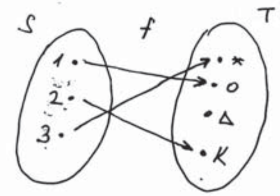
h nije f-ja (zašto?)

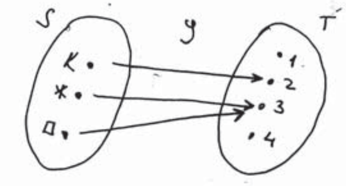
$f(n) = n^2$ je f-ja sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{N}$

Funkcija f je jedan-na-jedan (1-1 ili injektivna f-ja) ako se nikad dva različita elementa ne preslikavaju na isto mjesto tj.

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$$

npr.

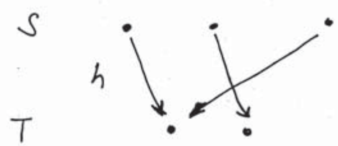




f-ja f je 1-1 f-ja g nije 1-1

F-ja f je na (ili sirjektivna f-ja) ako elementi od S pogađaju sve elemente od T, tj. $\underline{\forall(t \in T)\, \exists(s \in S)\ f(s) = t}$

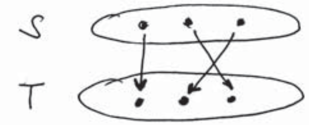
npr. Iz prethodnog primjera f-je f i g nisu sirjektivne.



h je na f-ja

F-ja je bijektivna ako je 1-1 i na.

npr.



Binarna relacija na skupu S je podskup od $S \times S$.

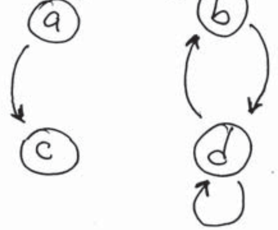
npr. $S = \{a, b, c\}$

$S \times S = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

$R = \{(a,a), (b,c), (c,b)\}$ je jedna binarna relacija na S.

Za konačan skup S relaciju možemo predstaviti kao "orjentisan graf".

npr. $R=\{(a,b),(a,c),(b,d),(d,b),(d,d)\}$



$S=\{a,b,c,d\}$

vrhovi: a,b,c,d

ivice $R \in S\times S$

Relacija $R\subseteq S\times S$ je

- refleksivna, ako je $(a,a)\in R$ za $\forall(a\in S)$

- simetrična, $\forall(a,b\in S)\ (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$

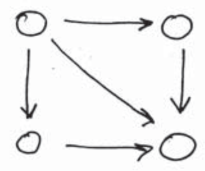
  ako je $a \to b$ kadgod je $a \leftarrow b$

- tranzitivna, $\forall(a,b,c\in S)\ ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R) \Rightarrow (a,c)\in R$

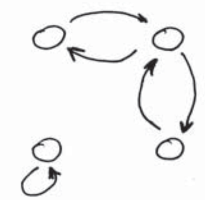
  ako je $a \to c$ kad god je

  $a \to b$ i $b \to c$

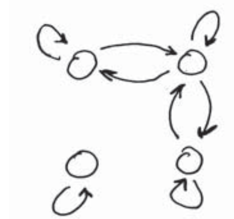
npr.



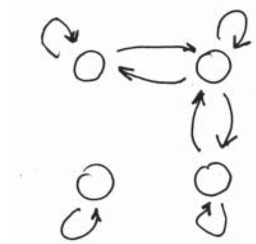
tranzitivna, nije simetrična, nije refleksivna



simetrična, nije refleksivna, nije tranzitivna



refleksivna i simetrična, nije tranzitivna



refleksivna, tranzitivna i simetrična

Relacija koja zadovoljava sve tri spomenute osobine (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost) zove se RELACIJA EKVIVALENCIJE.

5. Provjeriti bijektivnost sljedećih f-ja:

$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x^2$

$f_2:\mathbb{R}\to[0,+\infty),\ f_3(x)=x^3$.

Rj. $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=x^2$

1-1 (injektivnost): $\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R})(x_1\neq x_2 \Rightarrow f_1(x_1)\neq f_1(x_2))$

uzmimo $x_1=1$ kad $f_1(1)=1$

za x_2 uzmimo -1 kad $f_1(-1)=1$. Našli smo x_1 i x_2 za koje vrijedi $x_1\neq x_2$ ali je $f_1(x_1)=f_2(x_2)$.

F-ja nije 1-1.

na (sirjektivnost): $\forall(x\in\mathbb{R})\ \exists(y\in\mathbb{R})\ y=f(x)=x^2$

$y=x^2$

Ako za y uzmem -1 (ili bilo koji negativan broj) tad ne postoji realan broj x za koji važi $y=x^2$

$(-1\neq x^2$ za $\forall x\in\mathbb{R})$

F-ja nije na.

F-ja f_1 nije ni injektivna ni sirjektivna pa f-ja nije ni bijektivna.

$f_2:\mathbb{R}\to[0,+\infty),\ f_3(x)=x^3$

Odmah primjetimo da f_2 nije f-ja.
(negativne brojeve preslikava u negativne što nije dozvoljeno po definiciji f_2)

Kako f_2 nije f-ja bijektivnost se ne može ni razmatrati.

6. Dokazati da je f-ja $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f(x)=\frac{2+x}{3-x}$ bijektivna i naći njenu inverznu f-ju.

Rj. $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ f(x)=\frac{2+x}{3-x}$

1-1 (injektivnost): $\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-3\})\ x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

1-1 možemo napisati i u drugačijem obliku

$\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-3\})\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

pa pretpostavimo da je $f(x_1)=x_2)$

$\Rightarrow\ \frac{2+x_1}{3-x_1}=\frac{2+x_2}{3-x_2}$ kako je $3-x_1$ i $3-x_2\neq 0$ to smijemo $/\cdot(3-x_1)(3-x_2)$

$(2+x_1)(3-x_2)=(2+x_2)(3-x_1)$

$6-2x_2+3x_1-x_1x_2=6-2x_1+3x_2-x_1x_2$

$3x_1-2x_2=3x_2-2x_1\Rightarrow 5x_1=5x_2\Rightarrow x_1=x_2$

pokazali smo da $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

što znači f-ja f je injektivna. ...(*)

na (sirjektivnost): $\forall(y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})\ \exists(x\in\mathbb{R}\setminus\{3\})\ y=f(x)=\frac{2+x}{3-x}$

$y=\frac{2+x}{3-x}$ $/\cdot(3-x)$ smijemo množiti zato što je $x\neq3$

$y(3-x)=2+x$

$3y-yx=2+x$

$-yx-x=2-3y$

$x(-y-1)=2-3y$ $/:(-y-1)$ smijemo dijeliti zato što je $y\neq-1$

$x=\frac{2-3y}{-y-1}$

koju god vrijednost realnog broja y da uvrstimo u $x=\frac{2-3y}{-y-1}$ dobićemo realan broj x. $(y\neq-1)$

$(x\neq3$ zato što nebi mogli ni formirati izraz $x=\frac{2-3y}{-y-1}$ u suprotnom)

f-ja f je sirjektivna ...(**)

Iz (*); (**) $\Rightarrow$ f-ja f je bijektivna.

Inverzna f-ja $f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ima osobinu $f^{-1}(f(x))=x$

tj. $f^{-1}(y)=x\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{2-3y}{-y-1}$

što je trebalo naći.

7. Dat je skup $A=\{a,b,c,d\}$ i u njemu relacije:

$\rho_1=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,

$\rho_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c)\}$,

$\rho_3=\{(a,a),(b,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}$,

$\rho_4=A^2$.

Ispitati refleksivnost (R), simetričnost (S) i tranzitivnost (T) ovih relacija.

Rj. ρ_1 jest R, jest S i jest T.

ρ_2 jest R, nije S $((a,b)\in\rho_2$ ali $(b,a)\notin\rho_2)$ i nije T
$((a,b)\in\rho_2\wedge(b,c)\in\rho_2$ ali nije $(a,c)\in\rho_2)$

ρ_3 nije R ($(c,c) \notin \rho_3$), jest S i nije T

$((c,a) \in \rho_3 \wedge (a,c) \in \rho_3$ ali $(c,c) \notin \rho_3)$

ρ_4 jest R, jest S i jest T.

(8.) U skupu $\mathbb{Z}$ je definisana relacija ρ sa

$x \rho y \Leftrightarrow 3 \mid (x-y)$.

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$.

Rj. refleksivnost: $\forall (x \in \mathbb{Z})\ x \rho x$

$x \rho x \Leftrightarrow 3 \mid (x-x) \Leftrightarrow 3 \mid 0 \Leftrightarrow \exists (k \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k = 0$

što je tačno

ρ jest refleksivno

simetričnost: $\forall (x,y \in \mathbb{Z})\ x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$x \rho y \Rightarrow 3 \mid (x-y) \Rightarrow \exists (k \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k = x-y \Rightarrow$

$\exists (k \in \mathbb{Z})\ (-3) \cdot (-k) = x-y \Rightarrow (-3) k = y-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (g \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot g = y-x \Rightarrow 3 \mid y-x \Rightarrow y \rho x$

ρ jest simetrično

tranzitivnost: $\forall (x,y,z \in \mathbb{Z})\ x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow 3 \mid x-y \wedge 3 \mid y-z \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k_1 = x-y \wedge 3 \cdot k_2 = y-z \Rightarrow$

$3k_1 + 3k_2 = x-y+y-z \Rightarrow 3(k_1+k_2) = x-z \Rightarrow 3 \mid x-z$

$\Rightarrow x \rho z$

ρ jest refleksivna

ρ jest relacija ekvivalencije

RELACIJA

10. Neka je $\varrho \subset A \times B$, tada je ϱ *(binarna) relacija u skupu* $A \times B$. Ako je $A = B$, onda se kaže da je ϱ *relacija u skupu* A.
Umjesto $(x, y) \in \varrho$ uobičajeno je pisati $x\varrho y$. Slično $(x, y) \notin \varrho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \varrho y$.

11. Neka je $\varrho \subset S \times S$, tada su moguća svojstva relacije ϱ, na primjer:

11.1. *refleksivnost*: $(\forall a \in S)\, a\varrho a$;

11.2. *simetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \Rightarrow b\varrho a$;

11.3. *antisimetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho a \Rightarrow a = b$;

11.4. *tranzitivnost*: $(\forall a, b, c \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho c \Rightarrow a\varrho c$.

12. Binarna relacija ϱ u S je *relacija ekvivalencije* ako je *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*. Takva relacija se često označava sa $\sim$.

13. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija (djelimičnog, parcijalnog) uređenja*. Relacija uređenja najčešće se označava sa $\leqq$ ili sa $\geqq$. Za skup S u kome je definisana relacija $\leqq$ (parcijalnog) uređenja kaže se da je *(parcijalno) uređen* tom relacijom.
Ako je skup S uređen relacijom $\leqq$ koja ima osobinu

$$(\forall a, b \in S)\, (a \leqq b) \vee (b \leqq a),$$

kaže se da je S tom relacijom *totalno (potpuno)* uređen.

FUNKCIJA

14. Neka su X i Y dva neprazna skupa. *Preslikavnje* ili *funkcija f skupa X* u *skup Y* je pravilo prema kome se svakom $x \in X$ pridružuje jedno i samo jedno $y \in Y$. Tu činjenicu zapisujemo na jedan od slijedećih načina:

$$f: X \to Y;\ f:(x, y),\ x \in X,\ y \in Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) = y \in Y,$$

gdje se x naziva *original (nezavisno promjenljiva)*,

$y = f(x)$ *slika (zavisno promjenljiva)*, a

X se naziva *definicioni* skup (ili *domen*) preslikavanja.

Gornja definicija funkcije može se kraće zapisati:

$$f: X \to Y \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\, (\exists!\, y \in Y)\, f(x) = y.$$

Moguća je slijedeća veza između funkcije i relacije:
Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija $f: X \to Y$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

(2) $\cup \{x \mid (x, y) \in f\} = X$.

15. Neka je $f: X \to Y \wedge A \subset X$, tada je $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A)\, y = f(x)\}$.

16. Neka je $f: X \to Y$. Ako je $f(X) = Y$, tada kažemo da je f *preslikavanje skupa X na* skup Y ili da je f *surjekcija* (ili *preslikavanje na*).

17. Ako važi implikacija

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, onda se f naziva *uzajamno jednoznačno (preslikavanje)* ili *injekcija*, ili $1-1$ preslikavanje (sa X u Y).

18. Preslikavanje f koje je $1-1$ i *na* zove se *bijekcija*. Ako su X i Y konačni, onda se za bijekciju $f: X \to Y$ kaže da je *permutacija*.

19. Ako je $f: A \to B$ i $g: B \to C$, onda je *složeno preslikavanje* $gf: A \to C$ (ili *kompozicija preslikavanja* f i g) definisana sa

$$(\forall x \in A)\, (gf)(x) = g(f(x)).$$

20. Preslikavanje $f: X \to X$ definisano sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$ naziva se *identičkim preslikavanjem* skupa X.

21. Ako je $f: X \to X$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ takvo da su složena preslikavanja ff^{-1} i $f^{-1}f$ identička preslikavanja, tj. takva da je

$$(\forall y \in f(X))\, f(f^{-1}(y)) = y \wedge (\forall x \in X)\, f^{-1}(f(x)) = x,$$

tada preslikavanje f^{-1} nazivamo *inverznim preslikavanjem* preslikavanja f.

22. Ako je $f: X \to Y$ obostrano jednoznačno preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ i ono je jedinstveno.

---

* Renatus Cartesius je latinsko ime i prezime francuskog matematičara i filozofa Dekarta (René Descartes, 1596 – 1650).

ZADACI

8. Ispitati osobine binarnih relacija:

a) $=$, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ na skupu realnih brojeva;

b) inkluzije $\subset$ na $P(S)$, tj. na partitivnom skupu skupa S;

c) $=$ u skupu brojeva $A \subset R$;

d) paralelnost $\|$ u skupu pravih u Euklidovoj** ravni R^2;

e) okomitost $\perp$ u skupu pravih u R^2;

f) $(N, |)$, gdje je N skup prirodnih brojeva i

$$a|b \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in N)\, b = ka \, (a,\, b \in N).$$

g) „a je relativno prosto prema b", tj. kraće $(a, b) = 1$, gdje su $a, b \in N$;

h) relacije kongruentnosti, koja se definiše na sljedeći način:

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod}\ m) \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in Z)\, a - b = km,\ (a,\, b,\, m \in Z,\ m \neq 0).$$

(Ako a, b nisu kongruentni (mod m), to se zapisuje kao $a \not\equiv b$ (mod m)).

RJEŠENJA

8. a) $=$ je relacija ekvivalencije na skupu relanih brojeva, $<$, $>$, $\leqq$, $\geqq$ su relacije poretka;
b) $\subset$ je relacija poretka na $P(S)$; c) $=$ je relacija ekvivalencije u skupu brojeva $A \subset R$;
d) $\|$ u skupu pravih iz R^2 je relacija ekvivalencije; e) $\perp$ je simetrična;
f) relacija poretka; g) $(a, b) = 1 \Rightarrow (b, a) = 1$; h) relacija ekvivalencije;

RELACIJA

10. Neka je $\varrho \subset A \times B$, tada je ϱ *(binarna) relacija u skupu* $A \times B$. Ako je $A = B$, onda se kaže da je ϱ *relacija u skupu* A.
Umjesto $(x, y) \in \varrho$ uobičajeno je pisati $x\varrho y$. Slično $(x, y) \notin \varrho \Leftrightarrow x \operatorname{non} \varrho y$.

11. Neka je $\varrho \subset S \times S$, tada su moguća svojstva relacije ϱ, na primjer:

11.1. *refleksivnost*: $(\forall a \in S)\, a\varrho a$;

11.2. *simetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \Rightarrow b\varrho a$;

11.3. *antisimetričnost*: $(\forall a, b \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho a \Rightarrow a = b$;

11.4. *tranzitivnost*: $(\forall a, b, c \in S)\, a\varrho b \wedge b\varrho c \Rightarrow a\varrho c$.

12. Binarna relacija ϱ u S je *relacija ekvivalencije* ako je *refleksivna*, *simetrična* i *tranzitivna*. Takva relacija se često označava sa $\sim$.

13. Binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se *relacija (djelimičnog, parcijalnog) uređenja*. Relacija uređenja najčešće se označava sa $\leqq$ ili sa $\geqq$. Za skup S u kome je definisana relacija $\leqq$ (parcijalnog) uređenja kaže se da je *(parcijalno) uređen* tom relacijom.
Ako je skup S uređen relacijom $\leqq$ koja ima osobinu

$$(\forall a, b \in S)\,(a \leqq b) \vee (b \leqq a),$$

kaže se da je S tom relacijom *totalno (potpuno)* uređen.

FUNKCIJA

14. Neka su X i Y dva neprazna skupa. *Preslikavnje* ili *funkcija* f *skupa* X u *skup* Y je pravilo prema kome se svakom $x \in X$ pridružuje jedno i samo jedno $y \in Y$. Tu činjenicu zapisujemo na jedan od slijedećih načina:

$$f: X \to Y;\ f: (x, y),\ x \in X,\ y \in Y;\ X \xrightarrow{f} Y;\ x \mapsto f(x),\ x \in X,\ f(x) = y \in Y,$$

gdje se x naziva *original (nezavisno promjenljiva)*,

$y = f(x)$ *slika (zavisno promjenljiva)*, a

X se naziva *definicioni* skup (ili *domen*) preslikavanja.

Gornja definicija funkcije može se kraće zapisati:

$$f: X \to Y \overset{\mathrm{Df}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X)\,(\exists!\, y \in Y)\, f(x) = y.$$

Moguća je slijedeća veza između funkcije i relacije:
Relacija $f \subset X \times Y$ je funkcija $f: X \to Y$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$;

(2) $\cup \{x \mid (x, y) \in f\} = X$.

15. Neka je $f: X \to Y \wedge A \subset X$, tada je $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A)\, y = f(x)\}$.

16. Neka je $f: X \to Y$. Ako je $f(X) = Y$, tada kažemo da je f *preslikavanje skupa* X *na* skup Y ili da je f *surjekcija* (ili *preslikavanje na*).

17. Ako važi implikacija

$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, onda se f naziva *uzajamno jednoznačno (preslikavanje)* ili *injekcija*, ili $1-1$ preslikavanje (sa X u Y).

18. Preslikavanje f koje je $1-1$ i *na* zove se *bijekcija*. Ako su X i Y konačni, onda se za bijekciju $f: X \to Y$ kaže da je *permutacija*.

19. Ako je $f: A \to B$ i $g: B \to C$, onda je *složeno preslikavanje* $gf: A \to C$ (ili *kompozicija preslikavanja* f i g) definisana sa

$$(\forall x \in A)\,(gf)(x) = g(f(x)).$$

20. Preslikavanje $f: X \to X$ definisano sa $f(x) = x$ za svako $x \in X$ naziva se *identičkim preslikavanjem* skupa X.

21. Ako je $f: X \to X$ i ako postoji preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ takvo da su složena preslikavanja ff^{-1} i $f^{-1}f$ identička preslikavanja, tj. takva da je

$$(\forall y \in f(X))\, f(f^{-1}(y)) = y \wedge (\forall x \in X)\, f^{-1}(f(x)) = x,$$

tada preslikavanje f^{-1} nazivamo *inverznim preslikavanjem* preslikavanja f.

22. Ako je $f: X \to Y$ obostrano jednoznačno preslikavanje, tada postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}: f(X) \to X$ i ono je jedinstveno.

---

* Renatus Cartesius je latinsko ime i prezime francuskog matematičara i filozofa Dekarta (René Descartes, 1596 – 1650).

ZADACI

9. Neka je $f: x \mapsto \dfrac{2x-a-b}{b-a}$, $(x \in [a, b],\ a,\ b \in R)$. Dokazati da je f bijekcija sa $[a, b]$ na $[-1, 1]$.

10. Odrediti sve funkcije $f: A \to B$ ako je:

a) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b\}$; b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{a, b, c\}$;

c) $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$.

Uoči preslikavanja koja su sirjekcija, injekcija ili bijekcija!

11. Ako su A, $B \subset X$, gdje je X domen funkcije f, dokazati da je:

$$f(A \cup B)=f(A) \cup f(B), \qquad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

RJEŠENJA

9. $f^{-1}: y \mapsto \frac{1}{2}[(b-a)y+a+b]\ (y \in [-1, 1] \xrightarrow{f^{-1}} [a, b])$.

10. a) Skup svih preslikavanja $\{f: A \mapsto B\}=\{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$, gdje je svaka uređena trojka, u stvari, $(f(1), f(2), f(3))$. Sva preslikavanja, osim (a, a, a) i (b, b, b), jesu surjekcije, nema injekcija ni bijekcija;

b) u ovom slučaju ima $3^3=27$ preslikavanja. Preslikavanja $(f(1), f(2), f(3)) \in \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$ su surjektivna i injektivna, tj. bijektivna;

c) ima $3^2=9$ preslikavanja. Nema surjekcija, injekcije su $(f(1), f(2)) \in \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$.

11. $y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow (\exists x \in A \cup B)\, y=f(x) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \vee (\exists x \in B)$
$y=f(x) \Leftrightarrow ((\exists x \in A)\, y=f(x)) \vee ((\exists x \in B)\, y=f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$;
$y \in f(A \cap B) \Leftarrow (\exists x \in A \cap B)\, y=f(x) \Leftarrow ((\exists x \in A) \wedge (\exists x \in B))\, y=f(x) \Leftarrow ((\exists x \in A)\, y=f(x)) \wedge$
$\wedge ((\exists x \in B)\, y=f(x)) \Leftarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B)) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.

Obrnuta inkluzija ne vrijedi u opštem slučaju, može npr. biti A, $B \neq \emptyset$, $f(A)=f(B)$, $A \cap B=\emptyset$, pa je $f(A \cap B)=\emptyset \neq f(A) \cap f(B)=f(A)$.

2 Skupovi i relacije

Pojam skupa je osnovni pojam u matematici pa se zato i ne definiše. Ovaj pojam objašnjavamo navodeći primjer nekog skupa i ukazujući na pravila njegove upotrebe u matematici.
Skupove označavamo velikim slovima latinice $A, B, C, ..., X, Y, ...$ a elemente nekog skupa malim slovima latinice $a, b, c, ..., x, y, ...$
Za skupove A i B kažemo da su jednaki ako su sastavljeni od istih elemenata.
Za skup A kažemo da je podskup skupa b ako svaki element iz skupa A istovremeno pripada i skupu B. To označavamo sa $A \subseteq B$.
Operacije sa skupovima definišemo sa:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x : x \in A \wedge x \in B\} \\ A \cup B &= \{x : x \in A \vee x \in B\} \\ A \backslash B &= \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \\ A \Delta B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \\ A \times B &= \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\} \end{aligned}$$

Zadatak 2.1 *Dokazati:*

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x &\in (A \cup B)^C \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Longleftrightarrow \rceil (x \in A \cup B) \\ &\Longleftrightarrow \rceil (x \in A \vee x \in B) \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in A^C \wedge x \in B^C \\ &\Longleftrightarrow x \in A^C \cap B^C. \end{aligned}$$

Zadatak 2.2 *Dokazati:*

$$A \backslash B = A \cap B^C.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x &\in A \backslash B \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B^C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap B^C. \end{aligned}$$

Zadatak 2.3 *Dokazati*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x &\in (A \cap B) \cup C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \vee x \in C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \vee x \in C \wedge x \in B \vee x \in C \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

Zadatak 2.4 *Dokazati:*

$$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x &\in (A \cap B) \backslash C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \backslash C \wedge x \in B \backslash C \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \backslash C) \cap (B \backslash C). \end{aligned}$$

Zadatak 2.5 *Dokazati:*

$$(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup C).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} x &\in (A \backslash B) \cap (C \backslash D) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \backslash B \wedge x \in C \backslash D \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \wedge x \notin D \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin D \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (x \notin B \wedge x \notin D) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \cap C \wedge x \notin B \cup D \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap C) \backslash (B \cup C). \end{aligned}$$

Zadatak 2.6 *Dokazati:*

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}(x,y)&\in(A\cap B)\times(C\cap D)\\&\iff x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D\\&\iff x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D\\&\iff x\in A\wedge y\in C\wedge x\in B\wedge y\in D\\&\iff (x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)\\&\iff (x,y)\in A\times C\wedge(x,y)\in B\times D\\&\iff (x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D).\end{aligned}$$

Zadatak 2.7 *Dat je skup* $X=\{1,2,3,4\}$. *Napisati relacije definisane sa*

$$\begin{aligned}\rho_1&=\left\{(x,y)\in X^2:x<y\right\}\\\rho_2&=\left\{(x,y)\in X^2:x\le y\right\}\\\rho_3&=\left\{(x,y)\in X^2:x>y\right\}.\end{aligned}$$

Rješenje:
Kako je

$$\begin{aligned}X^2=&\ X\times X=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}\end{aligned}$$

tada je

$$\begin{aligned}\rho_1&=\left\{(x,y)\in X^2:x<y\right\}=\\&=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.\\\rho_2&=\left\{(x,y)\in X^2:x\le y\right\}=\\&=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}.\\\rho_3&=\left\{(x,y)\in X^2:x>y\right\}=\\&=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}.\end{aligned}$$

Zadatak 2.8 *Neka je*$X=\{1,2,3\}$. *Napisati elemente relacije definisane sa*

$$\rho=\left\{(x,y,z)\in X^3:x+y\le z\right\}.$$

Rješenje:
Kako je

$$\begin{aligned}X^3=&\ X\times X\times X=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),\\&(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3)\,(2,1,1),(2,1,2),\\&(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),\\&(2,3,3)\,(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),\\&(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\rho&=\left\{(x,y,z)\in X^3:x+y\le z\right\}\\&=\{(1,1,2),(1,1,3),(1,2,3)\}.\end{aligned}$$

Zadatak 2.9 *U skupu* $\mathbb{N}$ *definisana je relacija*

$$\rho=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^2:x+5y=25\right\}.$$

Napisati elemente relacije ρ.

Rješenje:
Iz

$$\begin{aligned}x+5y&=25\\x&=25-5y\\x&=5\,(5-y)\end{aligned}$$

vidimo da $y\in\{1,2,3,4\}$, jer u protivnom x ne bi bio prirodan broj. Sada

$$\begin{aligned}y&=1\implies x=20\\y&=2\implies x=15\\y&=3\implies x=10\\y&=4\implies x=5\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\rho&=\left\{(x,y)\in\mathbb{N}^2:x+5y=25\right\}=\\&=\{(20,1),(15,2),(10,5),(5,4)\}.\end{aligned}$$

OSNOVNE OSOBINE SKUPA REALNIH BROJEVA I NJEGOVIH PODSKUPOVA

1. Struktura $(R, +, \cdot)$ je polje, tj.:

1.1. $(R, +)$ je Abelova grupa;

1.2. $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa gdje je 0 neutralni elemenat u odnosu na operaciju sabiranja;

1.3. vrijedi distributivnost $(\forall x, y, z \in R)\, x(y+z) = xy + xz$.

2. U skupu R definisana je binarna relacija $\leqq (\subset R^2)$, za koju vrijedi:

2.1. $\leqq$ je relacija totalnog poretka;

2.2. $x \leqq y \Rightarrow x+z \leqq y+z$ za svako $z \in R$;

2.3. $0 \leqq x,\ 0 \leqq y \Rightarrow 0 \leqq x \cdot y$.

3. Neka je $R \supset A \neq \emptyset$. Kaže se da je A *ograničen odozgo* (*odozdo*) ako postoji $M \in R$ (tj. $m \in R$) takav da je $x \leqq M$ $(m \leqq x)$ za svako $x \in A$. Pri tome se M (tj. m) naziva *majoranta*, (*minoranta*) skupa A. Skup je *ograničen* ako je ograničen i odozgo i odzdo.

4. Ako u skupu svih majoranti (minoranti) skupa A postoji najmanji (najveći) elemenat, on se naziva *supremum* (*infimum*) skupa A i označava $\sup A$ $(\inf A)$. Ako je još $\sup A = a \in A$ $(\inf A = b \in A)$, onda je a maksimum (b minimum) skupa A i pišemo $a = \max A$ $(b = \min A)$.

5. Svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum u R (aksiom supremuma).

6. Skup realnih brojeva R potpuno je okarakterisan sa 1, 2. i 5. tj. skup realnih brojeva je totalno uređeno polje na kome vrijedi aksiom supremuma. Ostala svojstva realnih brojeva mogu se izvesti iz ovih svojstava.

7. U skupu racionalnih brojeva

$Q = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in Z,\ q \in N\right\}$ vrijede sve osobine 1. i 2, ali ne vrijedi princip supremuma.

8. *Apsolutna vrijednost realnog broja je preslikavanje* $|\,|: R \to R_0^+$ koje je definisano formulom:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Važe slijedeće relacije:

(*i*) $|-x| = |x|$;

(*ii*) $|xy| = |x|\,|y|$;

(*iii*) $|x+y| \leqq |x| + |y|$;

(*iv*) $||x| - |y|| \leqq |x-y|$;

(*v*) $(\forall a > 0)\, |x| \leqq a \Leftrightarrow -a \leqq x \leqq a$;

(*vi*) $(\forall a > 0)\, |x| > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$.

9. Neki jednostavni podskupovi u R.

Neka je $a, b \in R$, $a < b$, tada uvodimo slijedeće oznake:

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} = I$;

$[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\} = \bar{I}$;

$(a, b] = [a, b] \setminus \{a\} = (a, b) \cup \{b\}$;

$[a, b) = [a, b] \setminus \{b\} = (a, b) \cup \{a\}$.

Skup $\bar{I}$ se naziva *zatvoreni interval* ili *segment*, a I se naziva *otvoreni interval* ili samo *interval*.

Pored toga, koriste se i slijedeći *neograničeni intervali*:

$[a, \infty) = \{x \mid x \geqq a\}$, $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$,

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqq b\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,

$(-\infty, +\infty) = R$.

10. ε – okolina broja $a \in R$ je interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, gdje je $\varepsilon > 0$.

11. Neka je $A \subset R$ i neka je $M = \sup A$, tada

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\, a > M - \varepsilon.$$

(Slijedi neposredno iz aksioma supremuma.)

12. Neki važniji podskupovi skupa R:

12.1. Skup prirodnih brojeva:

$N = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$,

$N_0 = N \cup \{0\}$.

12.2. Skup cijelih brojeva:

$Z = N^- \cup N_0$,

gdje je $N^- = \{x \mid (\exists n \in N)\, x + n = 0 \Leftrightarrow x = -n\}$.

12.3. Skup racionalnih brojeva Q.

12.4. Skup pozitivnih realnih brojeva $R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$, skup nenegativnih realnih brojeva $R_0^+ = R^+ \cup \{0\}$.

12.5. Skup iracionalnih brojeva

$I = R \setminus Q = \{x \in R \mid (\forall p \in Z)(\forall q \in N)\, x \neq \frac{p}{q}\}$.

13. Vrijedi niz inkluzija:

$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R = I \cup Q$.

14. Princip matematičke indukcije formulišemo na slijedeći način:

$((\forall n \in N)\, P(n)) \Leftarrow (P(1) \wedge (\forall n \in N)\, P(n) \Rightarrow P(n+1))$,

tj. iskaz $P(n)$ tačan je za sve prirodne brojeve n ako je tačno $P(1)$ i ako za svakoo $n \geqq 1$ vrijedi implikacija $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

15. Bernulijeva nejednakost:

$(\forall h > -1,\ h \neq 0)(\forall n \in N \setminus \{1\})(1+h)^n > 1 + nh$,

za $h = 0$ *ili za* $n = 1$ vrijedi znak $=$.

16. Binomna formula:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

gdje je $n\in N_0$ i *binomni koeficijent* „n nad k" je

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, & k\leqslant n\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

17. Vrijede slijedeće osobine binomnih koeficijenata:

$$(i)\quad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$(ii)\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k};$$

$$(iii)\quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1},$$

za sve $(n, k)\in N_0^2$.

Posljednja formula zove se zakon Pascalovog* trougla i daje mogućnost brzog izračunavanja binomnih koeficijenata, što je za $n\leqq 4$ prikazano u tabeli:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$(a+b)^n=$
0	1	0	0	0	0	0	$=1$
1	1	1	0	0	0	0	$=a+b$
2	1	2	1	0	0	0	$=a^2+2ab+b^2$
3	1	3	3	1	0	0	$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4	1	4	6	4	1	0	$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$

* Blaise Pascal (1623–1662), francuski matematičar, fizičar i filozof.

ZADACI

1. Neka je $A=\left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)\cap Q$. Odrediti skup svih majoranti $\overline{A}$ i skup svih minoranti $\underline{A}$ skupa A; $\inf A$, $\sup A$, $\max A$, $\min A$ u skupu Q. (Isto pitanje u skupu R.)

2. Dokazati implikaciju:

$(\forall x, y\in R)\, x^3+y^3=0\Rightarrow x+y=0.$

3. Dokazati da je:

a) $\sqrt{2}$ iracionalan broj; b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj; c) $3\sqrt{2}$ ili $2+\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Da li su brojevi iz a), b) ili c) algebarski?

4. Dokazati da je svaki beskonačan periodičan decimalni broj racionalan broj.

Slijedeće decimalne brojeve napisati u obliku $\frac{p}{q}$:

a) $4{,}\overline{31}$, b) $23{,}\overline{32}$, c) $1{,}98\overline{14}$.

5. Riješiti jednačinu:

a) $|x+1|-|2x-3|=2$; b) $|x+2|-|2x-1|=2$;

c) $|x^2-4x+3|-|x-2|=x-1$.

6. Riješiti nejednačinu:

a) $||x+2|-1|\leqq 1$; b) $|x^2-2x-1|\leqq 2$; c) $|x^2-x|-|x|<1$.

7. a) Pokazati da je ε – okolina tačke a

$\cup_\varepsilon(a)=\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}=\{x\,|\,a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$ za svako $\varepsilon>0$.

b) Napisati slijedeće dvojne nejednakosti u obliku jedne nejednakosti s apsolutnom vrijednošću:

1° $a<x<b$; 2° $x\notin(a, b)$; 3° $-1\leqslant x\leqslant 0$.

c) Pokazati da je $\cup_\varepsilon(a)\setminus\{a\}=\{x\,|\,0<|x-a|<\varepsilon\}$.

8. Dokazati jednakosti:

a) $\max(a, b)=\frac{1}{2}(a+b+|b-a|)$; b) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

$\min(a, b)=\frac{1}{2}(a+b-|b-a|)$;

9. Matematičkom indukcijom dokazati jednakost (obrazac za zbir n članova geometrijske progresije).

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}aq^{k-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}\ (q\neq 1,\ n\in N).$$

10. Dokazati identitete:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$; b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$; d) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$; f) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

g) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

h) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;

i) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$; j) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$;

k) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$; l) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$;

m) $\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$; n) $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x/\sin\frac{x}{2}$.

11. Neka je $a+\frac{1}{a}$ cijeli broj. Dokazati da je broj $a^n+\frac{1}{a^n}$ za proizvoljno $n\in N$ takođe cijeli broj.

12. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad (n\in N).$$

13. Dokazati identitet

$$\prod_{r=2}^{n}\frac{r^3-1}{r^3+1}=\frac{2}{3}\,\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

14. Dokazati nejednakosti:

a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqq\sqrt{n}$; b) $(\forall a,\, b\in R^+)(n\in N,\, n\geqq 2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqq\frac{a^n+n^n}{2}$;

c) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\geqq 1+a_1+a_2+\ldots+a_n$ ako su $a_i\geqslant 0\vee a_i\in[-1,\, 0]$ za $i=\overline{1,\, n}$. (Specijalno, za $a_1=\ldots=a_n=x>-1$ dobijemo Bernulijevu* nejednakost:

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx;$$

d) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$; e) $n!\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; f) $|\sin nx|\leqq n|\sin x|$;

g) $(\forall x,\, y\in R^+)(\forall n\in N,\, n\geqslant 2)\sqrt{x^n}+\sqrt{y^n}\leqq\sqrt{(x+y)^n}$.

15. Dokazati djeljivosti:

a) $3\;|(5^n+2^{n+1}),\ n\in N_0$; b) $64\;|(3^{2n+3}+40n-27)\ n\in N_0$;

c) $133|(11^{n+2}+12^{2n+1}),\ n\in N_0$; d) $54\;|(2^{2n+1}-9n^2+3n-2),\ n\in N_0$.

16. Ako je p prost broj i $n\in N$, dokazati slijedeću kongruenciju (Fermat**)

$$n^p-n\equiv 0 \pmod p.$$

17. Dokazati

$$(\forall a\in R)(\forall n\in N_0)\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{k}=\binom{a+n+1}{n}.$$

18. Dokazati formule:

$$\binom{-1}{k}=(-1)^k;\quad \binom{-k}{n}=(-1)^n\binom{n+k-1}{n};$$

$\binom{1/2}{k}=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}=(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$, gdje je

$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)=(2k-1)!!$,

$2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)=(2k)!!\ (k\in N)$.

19. Izračunati sume:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; b) $\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$; d) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$; e) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots$.

20. Dokazati identitete:

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$, $n=2k$;

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{n}=2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$, $n=2k-1$,

gdje je $k\in N$.

---

* Jakob Bernoulli (1654 – 1705), švajcarski matematičar holandskog porijekla.

** Pierre de Fermat (1601 – 1665), francuski matematičar, po zanimanju pravnik, koji se matematikom bavio iz hobija.

RJEŠENJA

1. U skupu $Q: \overline{A} = \{x \mid x \in Q \wedge x > \sqrt{2}\}$,

$\underline{A} = \{x \mid x \in Q \wedge x \leqq \frac{1}{2}\}$, $\inf A = \frac{1}{2} = \min A$, $\sup A$ i $\max A$ ne postoje.

U skupu $R: \overline{A} = \{x \mid x \geqq \sqrt{2}\}$, $\underline{A} = \{x \mid x \leqq \frac{1}{2}\}$, $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = \sqrt{2}$, $\max A$ ne postoje.

2. Neka je $p \equiv x^3 + y^3 = 0$, $q \equiv x + y = 0$ $(x,\ y \in R)$.

Tada je $p' \equiv x^3 + y^3 \neq 0$, $q' \equiv x + y \neq 0$.

Prema tome,

$q' \equiv x + y \neq 0 \Rightarrow (x \neq -y) \Rightarrow (x^3 \neq -y^3) \Rightarrow (x^3 + y^3 \neq 0)$, tj. (1) $(q' \Rightarrow p') \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$,

što je i trebalo dokazati.

Formula (1) dokazana je u 1.1, zadatak 1.a).

3. a) Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ racionalan broj i da su p, q relativno prosti cijeli brojevi. Tada je $2 = p^2/q^2$, tj. $p^2 = 2q^2$. Odatle se vidi da je p djeljiv brojem 2, tj. $p = 2k$, $k \in N$. Na osnovu toga je $q^2 = 2k^2$, pa se zaključuje da je i q djeljivo brojem 2, što je protivno pretpostavci da su p i q relativno prosti brojevi. Dakle, $\sqrt{2} \notin Q$.

b) Pretpostavimo da je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in Q$. Tada je $(\sqrt{3})^2 = (r - \sqrt{2})^2$ ili $3 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2$, odnosno

$\sqrt{2} = \dfrac{r^2 - 1}{2r} \in Q$, što je nemoguće jer prema a) $\sqrt{2} \notin Q$.

c) Pretpostavka da je $3\sqrt{2} = r_1$ ili $2 + \sqrt{2} = r_2$, gdje su r_1, $r_2 \in Q$ povlači da je

$\sqrt{2} = \dfrac{r_1}{3}$ ili $\sqrt{2} = r_2 - 2$,

što je nemoguće, jer su $r_1/3$ ili $r_1 - 2$ racionalni brojevi. Prema tome, pretpostavka da su $3\sqrt{2}$ ili $2 + \sqrt{2}$ racionalni brojevi otpada, pošto nas je dovela do protivrječnosti $(\sqrt{2} \in Q)$.

4. Neka je $x = c_0,\ a_1 a_2 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$ beskonačan periodičan decimalni broj, gdje $a_i\ (i = \overline{1, k})$ i $b_j\ (j = \overline{1, p})$ predstavljaju cifre u decimalnom zapisu broja x. Sad je

$10^{k+p} x = c_0 a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_p, \overline{b_1 \ldots b_p}$

$10^k \quad x = c_0 a_1 a_2 \ldots a_k, \overline{b_1 \ldots b_p}$

tj.

$10^k (10^p - 1) x = c_0 a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_k - c_0 a_1 \ldots a_k$

ili

$$x = \frac{z}{10^k (10^p - 1)} \qquad (z \in Z).$$

a) 427/99, b) 2309/99, c) 19616/9900.

5. a) Karakteristične vrijednosti su $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$:

$x + 1 \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow x \overset{\geq}{\underset{<}{=}} -1$,

$2x - 3 \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0 \Leftrightarrow x \overset{\geq}{\underset{<}{=}} \frac{3}{2}$.

Prema tome je:

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
$x+1$	$-$	0 $+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	0. $+$
slučaj	1°	2°	3°

1° Za $x \in (-\infty, -1)$ jednačina glasi:

$-(x+1) + (2x-3) = 2 \Leftrightarrow x = 6 \notin (-\infty, -1)$, te otpada.

2° Za $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right)$ jednačina je $\Leftrightarrow$

$x + 1 + (2x - 3) = 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \in \left[-1, \frac{3}{2}\right)$,

te je $x = \frac{4}{3}$ rješenje jednačine.

3° Za $x \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ jednačina je $\Leftrightarrow$

$x + 1 - (2x - 3) = 2 \Leftrightarrow x = 2 \in \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Dakle,

$\{x \mid |x+1| - |2x-3| = 2\} = \left\{\frac{4}{3}, 2\right\}$.

b) Karakteristične tačke su $\{-2, 1/2\} = \{x \mid x + 2 = 0 \vee 2x - 1 = 0\}$. Tim tačkama se skup $R = (-\infty, -2) \cup [-2, 1/2) \cup [1/2, \infty)$ dijeli na tri disjunktna intervala, u kojima izrazi pod znakom modula mijenjaju znakove. Potražićemo rješenje date jednačine u svakom od tih intervala. Dobije se

$\{x \mid |x+2| - |2x-1| = 2,\ x \in R\} = \{1/3, 1\}$.

c) $\{x \in R \mid |x^2 - 4x + 3| - |x - 2| = x - 1\} = \{2 - \sqrt{2}, 2, 3 + \sqrt{3}\}$.

6. a) $\big||x+2|-1\big|\leqq 1 \Leftrightarrow -1\leqq |x+2|-1\leqq 1$

$$\Leftrightarrow 0\leqq |x+2|\leqq 2$$
$$\Leftrightarrow -2\leqq x+2\leqq 2$$
$$\Leftrightarrow -4\leqq x\leqq 0.$$

Dakle, $\{x\in R \mid \big||x+2|-1\big|\leqq 1\}=[-4,\ 0]$.

b) $\{x\in R \mid |x^2-2x-1|\leqq 2\}=[-1,\ 3]$;

c) $\{x\in R \mid |x^2-x|-|x|<1\}=(-1,\ 1+\sqrt{2})$.

7. a) $(\forall\varepsilon>0)\ |x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x-a<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow x\in U_\varepsilon(a);$$

b) 1° $a<x<b \Leftrightarrow A-\varepsilon<x<A+\varepsilon \wedge A+\varepsilon=b \wedge A-\varepsilon=a$

$$\Leftrightarrow |x-A|<\varepsilon \wedge A=\frac{1}{2}(a-b)\wedge \varepsilon=\frac{1}{2}(b-a)$$
$$\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|<\frac{1}{2}(b-a);$$

2° $x\notin(a,\ b) \Leftrightarrow x\in x\notin \underset{\frac{1}{2}(b-a)}{\cup}\left(\frac{1}{2}(a+b)\right)$

$$\Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|\geqq\frac{1}{2}(b-a);$$

3° $-1\leqq x\leqq 0 \Leftrightarrow \left|x-\frac{1}{2}(-1+0)\right|\leqq\frac{1}{2}(0+1)$

$$\Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|\leqq\frac{1}{2}.$$

9. Kako je:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{1} aq^{k-1}=a=a\dfrac{1-q}{1-q}$, tj. $a=a$, formula je tačna za $n=1$.

b) Pretpostavimo da je formula tačna za neki prirodan broj n. Tada je

$$S_{n+1}=S_n+aq^n$$
$$=a\frac{1-q^n}{1-q}+aq^n \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=a\frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}$$
$$=a\frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

tj. formula je tačna za $n+1$ ako je tačna za n. Dakle, po principu indukcije, formula za S_n tačna je za sve prirodne brojeve.

10. Pri dokazivanju se možemo koristiti matematičkom indukcijom.

a) Kako je

1° $\sum_{k=1}^{1} k=1=\frac{1}{2}\cdot 1\,(1+1)$, tj. $1=1$,

formula je tačna za $n=1$.

2° Pretpostavimo li da je formula tačna za neki prirodan broj n, tada je za $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+n+1$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1 \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

tj. formula je tačna i za $n+1$ ako je tačna za n.
Na osnovu 1° i 2° formula a) je tačna po principu indukcije za sve $n\in N$.

l) 1° Za $n=1$ formula je identitet:

$a^1-b^1=(a-b)\cdot a^0$.

2° $a^{n+1}-b^{n+1}=a^{n+1}-a^nb+a^nb-b^{n+1}$

$=a^n(a-b)+b(a^n-b^n)$, odakle na osnovu induktivne pretpostavke

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

slijedi

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left[a^n+b(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})\right]$$
$$=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\ldots+ab^{n-1}+b^n),$$

tj. formula vrijedi i za $n+1$.
Dakle, po principu matematičke indukcije data formula je tačna za sve $n\in N$.

m) 1° Za $n=1$: $\prod_{k=1}^{1}\cos\dfrac{x}{2^k}=\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$, što je tačno, jer je $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

2° Pretpostavimo da je formula tačna za neki prirodan broj n. Tada je

$$\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{x}{2^k}=\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right)\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}} \text{ (na osnovu induktivne pretpostavke)}$$
$$=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}}\cdot\cos\frac{x}{2^{n+1}}=\frac{\sin x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}}},$$

tj. formula je tačna i za $n+1$. Dakle, tačna je za sve $n\in N$.

11. Zapišimo iskaz u slijedećoj formi:

$N(n)=a^n+1/a^n\in Z$ ako je $N(1)\in Z$.

Lako se provjerava identitet

(*) $N(n+1)\equiv N(1)N(n)-N(n-1),\ n>1,$

odakle slijedi da je $N(n+1)$ cio broj ako su $N(n-1)$ i $N(n)$ cijeli brojevi.

Sada je

$$N(2)=a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\in Z.$$

Prema tome:

1° $N(1)$ i $N(2)$ su cijeli brojevi.

2° Iz (*) slijedi da je $N(n+1)$ cijeli broj ako su $N(n-1)$, $N(n)$ cijeli brojevi.

Na osnovu 1° i 2° slijedi da je $N(n)\in Z$ za svako $n\in N$ po principu matematičke indukcije.

12. Dokaz indukcijom:

1° Za $n=1:\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{\sqrt{4}}$, tj. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

nejednakost je tačna.

2° Induktivna pretpostavka

$$A(n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}=B(n),\ n\geqslant 1$$

poslije množenja sa $\frac{2n+1}{2n+2}$ prelazi u

$$(*)\ A(n+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqq\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Ako je

$$(**)\ \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqq\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}=B(n+1),$$

tada iz (*) i (**) slijedi da je

$A(n+1)\leqq B(n+1)$,

tj. nejednakost koju dokazujemo vrijedi i za $n+1$.

Nejednakost (**) je ekvivalentna sa

$\frac{1}{3n+1}\cdot\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\leqq\frac{1}{3n+4}$, što je ekvivalentno sa

$12n^3+28n^2+19n+4\leqq 12n^3+28n^2+20n+4$

tj. $\Leftrightarrow 0<n$.

Time je nejednakost $A(n)\leqq B(n)$ dokazana.

14. a) Kako je za svako $0<k\leqq n$

$$\sqrt{k}\leqq\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(\text{„}=\text{“ za } k=n),$$

$$\text{tj. }\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geqq n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

što je i trebalo dokazati.

b) Dokaz izvesti indukcijom.

d) Direktna posljedica Bernulijeve nejednakosti za $x=\frac{1}{n}$.

e) Kako je

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-(n+1-k)k=\left(\frac{n+1}{2}-k\right)^2\geqq 0,\text{ to je } (\forall k=\overline{1,n})\,(n+1-k)k\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Množenjem tih nejednakosti za $k=\overline{1,n}$ dobije se

$$n\cdot 1\cdot(n-1)\cdot 2\cdots 1\cdot n\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},\text{ tj. }(n!)^2\leqq\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n},$$

što je i trebalo dokazati.

Primjedba: Sve nejednakosti dokazati i indukcijom.

f) 1° Za $n=1:|\sin 1x|\leqq 1|\sin x|$ je tačno;

2° Pošto je

$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x,$

slijedi

$$\begin{aligned}|\sin(n+1)x|&\leqq|\sin nx|\,|\cos x|+|\cos nx|\,|\sin x|\\&\leqq|\sin nx|+|\sin x|\ (\Leftarrow|\sin\alpha|\leqq 1,\ |\cos\alpha|\leqq 1)\\&\leqq(n+1)|\sin x|,\end{aligned}$$

gdje se posljednja nejednakost dobije na osnovu induktivne pretpostavke da je data nejednakost tačna za neko $n\in N$.

g) Primijenimo indukciju.

1° Za $n=2$ nejednakost se svodi na identitet.

2° Sada je

$$\begin{aligned}\sqrt{x^{n+1}}+\sqrt{y^{n+1}}&=\sqrt{x^n}\sqrt{x}+\sqrt{y^n}\sqrt{y}\\&<\sqrt{x^n}\sqrt{x+y}+\sqrt{y^n}\sqrt{x+y}\quad(\Leftarrow x,\ y>0)\\&=(\sqrt{x^n}+\sqrt{y^n})\sqrt{x+y}\\&\leqq\sqrt{(x+y)^n}\sqrt{x+y}\quad(\text{induktivna pretpostavka})\\&=\sqrt{(x+y)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=2$.

Primjedba: za $n=1$: $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x+y}$ $(x,\ y>0)$.

15. a) Treba dokazati $3 \mid f(n)=5^n+2^{n+1}$, $n\in N_0$.

Kako je

$$f(n+1)=5^{n+1}+2^{n+2}+5^n+2^{n+1}-f(n)$$
$$=6\cdot 5^n+3\cdot 2^{n+1}-f(n),$$

to je $3 \mid f(n+1)$ ako je $3 \mid f(n)$. Kako je $f(0)=3$, to je $3 \mid f(n)$ po principu matematičke indukcije.

d) Ako je $f(n)=2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, tada je $f(n+1)-f(n)=6(2^{2n}-3n-1)$.

Ako je $g(n)=2^{2n}-3n-1$, tada je $g(n+1)-g(n)=3(2^{2n}-1)$.

Ako je $h(n)=2^{2n}-1$, tada je $h(n+1)-h(n)=3\cdot 2^n$.

1° Kako je $3 \mid h(1)=3$ i $3 \mid h(n+1)$ ako je $3 \mid h(n)$, to je $3 \mid h(n)$ za $n\in N$.

2° Kako je $9 \mid g(1)(=0)$ i $9 \mid g(n+1)$ ako je $9 \mid g(n)$, to je $9 \mid g(n)$ za $n\in N$.

3° Budući da je $54 \mid f(1)=0$ i $54 \mid f(n+1)$, ako je $54 \mid f(n)$, slijedi $54 \mid f(n)$ za $n\in N$.

Osim toga, $54 \mid f(0)=0$.

Dokaz je moguće izvesti i na drugi način, npr. primjenom binomne formule:

a) $5^n=(2\cdot 3-1)^n=3q+(-1)^n$, $(q\in N_0)$

$2^{n+1}=(3-1)^{n+1}=3s+(-1)^{n+1}$, $(s\in N)\Rightarrow 5^n+2^{n+1}=3(q+s)$, što je i trebalo dokazati.

16. Za $N=1$ kongruencija je tačna. Pretpostavimo da je formula tačna za neko $n\in N$. Pođemo li sad od jednakosti

$$(*)\quad (n+1)^p=n^p+\binom{p}{1}n^{p-1}+\dots+\binom{p}{p-1}n+1.$$

Binomni koeficijenti $\binom{p}{k}$ $(k=\overline{1,\ p-1})$ djeljivi su sa p (ako je p prost broj), pa dobijemo kongruenciju (iz $(*)$)

$$(n+1)^p\equiv n^p+1 \pmod p.$$

Odavde slijedi:

$$(n+1)^p-(n+1)\equiv n^p-n \pmod p,$$

tj. kongruencija vrijedi i za $n+1$ ako vrijedi za neko n.
Prema tome, kongruencija je dokazana metodom matematičke indukcije.

17. Poći od Paskalove formule

$$\binom{a+n+1}{n}+\binom{a+n+1}{n+1}=\binom{a+n+2}{n+1}$$ i primijeniti princip indukcije.

19. a) Iz $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ za $x=1$ izlazi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

b) Kako je $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, slijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}=n2^{n-1},\ (\Leftarrow \text{iz a)}).$$

c) $$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=n2^{n-1}+2^n=2^{n-1}(n+2).$$

d) Iz $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ za $x=-1$ slijedi $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$

e) Iz a) i d) slijedi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=2^n, \text{ tj.}$$

$$2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots\right)=2^n \text{ ili } \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\dots=2^{n-1}.$$

Slično:

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots=2^{n-1}.$$

20. Stavimo li $n=2k-1$, posmatrani identitet se svodi na

$$u_k\equiv\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{2k-1}=1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2k-1}\equiv v_k.$$

Odavde je

$$(*)\quad u_{k+1}-u_k=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k},$$

$$(**)\quad v_{k+1}-v_k=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}.$$

Ako se pretpostavi da je $u_k=v_k$ iz $(*)$ i $(**)$ slijedi $u_{k+1}=v_{k+1}$. Kako je $u_1=v_1$, dokaz indukcijom je završen za n neparno.
Slično provesti dokaz za n parno, tj. $n=2k$.

Matematička indukcija

Matematička tvrdnja je tačna (istinita) za svaki prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$) ako su ispunjena sljedeća dva uslova:

a) BAZA INDUKCIJE
Tvrdnja je tačna za broj 1.

b) INDUKCISKI KORAK
Ako na osnovu pretpostavke da je tvrdnja tačna za $k \leq n$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ slijedi da je istinita i za broj $n+1$.

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važe sljedeće jednakosti:

a) $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Rj. a) $1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$

BAZA INDUKCIJE
Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1 = 1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

KORAK INDUKCIJE
Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $k = 1, 2, \dots, n$ tj. $1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2$ za sve k od 1 do n. Pokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$. tj. pokažimo da $1+3+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$

$$\underline{\underline{1+3+5+\dots+(2n-1)}}+(2n+1) \overset{\text{prema pretpostavci}}{=} \underline{\underline{n^2}}+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Dobili smo $1+3+5+\dots+(2n+1) = (n+1)^2$ što je i trebalo.

ZAKLJUČAK
Jednakost $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ je tačna za sve prirodne brojeve.

b) $1^3+2^3+3^3+\dots+k^2 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$

BAZA INDUKCIJE
Pokažimo da je tvrdnja tačna za $k=1$. $1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2$ Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE
Pretpostavimo da je $1^3+2^3+3^3+\dots+k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ za $\forall k = 1, 2, \dots, n$
Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da $1^3+2^3+\dots+(n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.
Imamo $1^2+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4} =$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK
Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

BAZA INDUKCIJE ... sami...

KORAK INDUKCIJE

$$\dots \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} \frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK
Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

1. Dokázati da je $2^n \geq 2n$ za $\forall (n \in \mathbb{N})$.

Rj. $2^k \geq 2\cdot k$, k prirodan broj

BAZA INDUKCIJE
$k=1$: $2^1 \geq 2\cdot 1$ tj. $2 \geq 2$ tačno
Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK
Pretpostavimo da je $2^k \geq 2k$ za svaki $k = 1, 2, \dots, n$.
Na osnovu toga, dokažimo da je tačno i $2^{n+1} \geq 2(n+1)$.

$$\underline{\underline{2^{n+1}}} = 2^n\cdot 2 = 2^n+2^n \geq 2^n+2 \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} 2n+2 = \underline{\underline{2(n+1)}}$$

tj. $2^{n+1} \geq 2(n+1)$ što je i trebalo pokazati.

ZAKLJUČAK
Nejednakost $2^n \geq 2n$ je tačna za svaki prirodan broj.

(2.) Dokazati da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$ tačna za svaki prirodan broj.

Rj. $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{k}$, $k=1,2,3\ldots$

BAZA INDUKCIJE $k=1$: $\frac{1}{\sqrt{1}}\geq\sqrt{1}$ tj. $1\geq 1$ tačno. Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je nejednakost $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{k}$ tačna za svaki $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\overset{\text{prema pretpostavci}}{\geq}\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za svaki prirodan broj.

(3.) Metodom matematičke indukcije dokazati da je 5^n+2^{n+1} djeljiv sa 3 za svaki prirodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je broj 5^k+2^{k+1} djeljiv sa 3 za $\forall k\in\mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $5^1+2^{1+1}=5+2^2=5+4=9$, 9 je djeljiv sa 3.

Za $k=1$ tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je 5^k+2^{k+1} djeljivo sa 3 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je i $5^{n+1}+2^{n+1+1}$ djeljivo sa 3.

$$5^{n+1}+2^{n+1+1}=5^{n+1}+2^{n+2}=5\cdot5^n+2\cdot2^{n+1}=2\cdot5^n+2\cdot2^{n+1}+3\cdot5^n$$

$$=\underbrace{2(5^n+2^{n+1})}_{\text{ovaj dio je prema pretpostavci djeljiv sa 3}}+\underbrace{3\cdot5^n}_{\text{ovo je djeljivo sa 3}}$$

Prema tome $5^{n+1}+2^{n+2}$ je djeljivo sa 3.

ZAKLJUČAK

5^k+2^{k+1} je djeljivo sa 3 za svaki prirodan broj k.

(4.) Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ vrijedi za sve prirodne brojeve.

Rj. $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$, k je prirodan broj.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}\Rightarrow 1=\frac{4}{4}\Rightarrow 1=1$ što je tačno.

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1^3+2^3+\ldots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ tačno za $k=1,\ldots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1^3+2^3+\ldots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\overset{\text{prema pretpostavci}}{=}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(5.) Dokazati da je $4^n+15n-1$ djeljivo sa 9 za svaki prirodan broj n.

Rj. Treba dokazati da je $4^k+15k-1$ djeljivo sa 9 za $\forall(k\in\mathbb{N})$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $4^1+15\cdot1-1=4+15-1=18$, 18 je djeljivo sa 9.

Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $4^k+15\cdot k-1$ djeljivo sa 9 za $k=1,2,\ldots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $4^{n+1}+15(n+1)-1$ tj. $4^{n+1}+15n+14$ djeljivo sa 9.

$$4^{n+1}+15n+14 = 4\cdot 4^n+15n-1+15 = 4\cdot 4^n+2\cdot 15n-2+16-15n =$$
$$= 4\cdot 4^n+4\cdot 15n-4+18-3\cdot 15n = 4(4^n+15n-1)+18-9\cdot 5n$$
$$= \underbrace{4(4^n+15n-1)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa } 9} + \underbrace{9(2-5n)}_{\text{ovo je djeljivo sa } 9}$$

Prema tome $4^{n+1}+15n+14$ je djeljivo sa 9.

ZAKLJUČAK

$4^n+15n-1$ je djeljivo sa 9 za svaki prirodan broj n.

6. Dokazati Bernulijevu nejednakost $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$ gdje je $h>-1$, a n pozitivan cijeli broj.

Rj. $(1+h)^k \geq 1+k\cdot h$, $h\in\mathbb{R}$, $h>-1$, $k\in\mathbb{N}$.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h \Rightarrow 1+h \geq 1+h$ ovo je tačno

Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(1+h)^k \geq 1+k\cdot h$ za $k=1,2,\dots,n$, $h>-1$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h$$

$h^2 \geq 0$

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{\geq} (1+nh)(1+h) = 1+h+nh+nh^2 \geq$$

$1+h+nh = 1+(n+1)h$ što je i trebalo dobiti.

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

7. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

8. Fibonačijev niz 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... je definisan rekurzivnom formulom $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ gdje su $a_1=a_2=1$. Dokazati da je $NZD(a_n,a_{n+1})=1$ za sve prirodne brojeve n (NZD je skraćenica od najveći zajednički djelilac, npr. $NZD(14,35)=7$).

Rj. $a_1=a_2=1$

$a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$

Treba dokazati da je $NZD(a_k,a_{k+1})=1$, za $\forall k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $a_1=1$, $a_2=1$, $NZD(a_1,a_2)=NZD(1,1)=1$ Tvrdnja je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $NZD(a_k,a_{k+1})=1$ za sve $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je $NZD(a_{n+1},a_{n+2})=1$.

$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

Označimo sa d NZD od brojeva a_{n+1} i a_{n+2} tj. $NZD(a_{n+1},a_{n+2})=d$.

Nađimo, čemu je d jednako? Odredimo d.

$NZD(a_{n+1},a_{n+2})=d \Rightarrow d\mid a_{n+1}$ (d dijeli a_{n+1}) i $d\mid a_{n+2}$ (d dijeli a_{n+2})

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_n=a_{n+2}-a_{n+1}\\ d\mid a_{n+1}\\ d\mid a_{n+2}\end{array}\right\} \Rightarrow d\mid a_n \ (d \text{ dijeli } a_n)$$

$$\text{Prema pretpostavci } \left.\begin{array}{l} d\mid a_n\\ d\mid a_{n+1}\\ \text{i } NZD(a_n,a_{n+1})=1\end{array}\right\} \Rightarrow d=1 \text{ što je i trebalo dobiti}$$

ZAKLJUČAK

$NZD(a_n,a_{n+1})=1$ za sve prirodne brojeve n, $\{a_n\}$ Fibon. niz

9. Dokazati da je broj $2^{2n}-3n-1$ djeljiv sa 9 za svaki prirodan broj veći od 1.

10. Metodom matematičke indukcije dokazati da jednakost $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

11. Dokazati Moavrov obrazac $(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx$.

Rj. $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx,\ k\in N$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $(\cos x+i\sin x)^1=\cos x+i\sin x$, Za $k=1$, tvrdnja je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $(\cos x+i\sin x)^k=\cos kx+i\sin kx$ za $k=1,2,\dots,n$

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x.$$

$$(\cos x+i\sin x)^{n+1}=(\cos x+i\sin x)^n\cdot(\cos x+i\sin x) \quad \text{na osnovu pretpostavke}$$

$$=(\cos nx+i\sin nx)\cdot(\cos x+i\sin x)=\cos nx\cdot\cos x+i\cos nx\sin x+i\sin nx\cos x+i^2\sin nx\sin x \overset{(*)}{=}$$

Adicione teoreme

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\overset{(*)}{=}\cos(nx+x)+i\sin(nx+x)=\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

12. Metodom matematičke indukcije dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{gdje je } q\in R\setminus\{1\}.$$

Rj. $1+q+q^2+\dots+q^k=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q},\ q\in R\setminus\{1\},\ k\in N$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $1+q=\dfrac{1-q^{1+1}}{1-q}=\dfrac{1-q^2}{1-q}=\dfrac{(1-q)(1+q)}{(1-q)}$ tj. $1+q=1+q$

Za $k=1$ jednakost je tačna

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $1+q+q^2+\dots+q^k=\dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$1+q+q^2+\dots+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

$$1+q+q^2+\dots+q^n+q^{n+1}\ \overset{\text{prema pretpostavci}}{=\!=}\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q}$$

$$=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+1+1}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \text{što je i trebalo dobiti}$$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

13. Ako su $x_1,x_2,\dots,x_n$ nenegativni realni brojevi, onda aritmetičku sredinu (prosjek) definišemo kao broj $A=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$ i njegovu geometrisku sredinu kao broj $G=\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n).$$

(Nejednakost prelazi u jednakost akko je $x_1=x_2=\dots=x_n$)

Rj. $A=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)$, $G=\sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k}$, $G\le A$, $k\in N$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\sqrt[1]{x_1}\le\frac{1}{1}(x_1)$ tj. $x_1\le x_1$ Za $k=1$ nejednakost je tačna.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je $\sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k}\le\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)$ za $k=1,2,\dots,n$.

Dokažimo da je $\sqrt[n+1]{x_1x_2\dots x_{n+1}}\le\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})$.

Ne gubeći opštost dokaza možemo smatrati da je $x_1\le x_2\le\dots\le x_{n+1}$ (*)

Označimo sa $A=\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})$, i sa $G=\sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_{n+1}}$.

Primjetimo da vrijedi

$$x_1=\frac{1}{n+1}\underbrace{(x_1+x_1+\dots+x_1)}_{(n+1)\text{ puta}}\overset{(*)}{\le}A\overset{(*)}{\le}\frac{1}{n+1}(x_{n+1}+x_{n+1}+\dots+x_{n+1})=x_{n+1} \quad (**)$$

Posmatrajmo sada sljedeće brojeve $x_2,x_3,\dots,x_n,\ x_1+x_{n+1}-A$.

(**) $\Rightarrow \; A-x_1 \geq 0 \;;\; x_{n+1}-A \geq 0 \;;\; x_1+x_{n+1}-A \geq 0$

Pa je $(A-x_1)\cdot(x_{n+1}-A) \geq 0$

$$A x_{n+1} - A^2 - x_1 x_{n+1} + A x_1 \geq 0$$

$$A(x_1+x_{n+1}-A) \geq x_1 x_{n+1}$$

Na n brojeva $x_2, x_3, \dots, x_n, x_1+x_{n+1}-A$ primjenimo indukcisku pretpostavku, dobićemo:

$$\frac{1}{n}(x_2+x_3+\dots+x_n+x_1+x_{n+1}-A) \geq \sqrt[n]{x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot(x_1+x_{n+1}-A)}$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}-A)\right]^n \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot(x_1+x_{n+1}-A)$$

$$\left[\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}-A)\right]^n = \left[\frac{1}{n}\left(x_1+x_2+\dots+x_{n+1}-\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right)\right]^n =$$

$$x_1-\frac{x_1}{n+1} = \frac{x_1(n+1)-x_1}{n+1} = \frac{x_1\cdot n}{n+1}$$

$$x_2-\frac{x_2}{n+1} = \frac{x_2 n+x_2-x_2}{n+1} = \frac{x_2\cdot n}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right)\right]^n = \left[\frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1})\right]^n = A^n$$

Pa imamo $A^n \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n(x_1+x_{n+1}-A) \quad /\cdot A$

$$A^{n+1} \geq x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n\cdot A(x_1+x_{n+1}-A) \underset{\text{kako je } A(x_1+x_{n+1}-A)\geq x_1x_{n+1}}{\geq} x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{n+1}(x_1+x_2+\dots+x_{n+1}) \geq \sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Nejednakost je tačna za sve prirodne brojeve n.

14. Metodom matematičke indukcije dokazati:

a) $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, n je prirodan broj.

b) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

c) $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

d) $2+4+6+\dots+(2n) = n(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

e) $1+a+a^2+\dots+a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $a\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$.

(#) Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju $5\mid(n^5-n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Rj. $5\mid(k^5-k)$, $k\in\mathbb{N}$ (ovo čitamo: pet djeli k^5-k gdje je k neki prirodan broj) čili k^5-k je djeljivo sa 5)

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $5\mid(1^5-1)$ tj. $5\mid 0$ 5 djeli 0 tj. $0=5\cdot s$ gdje je s neki broj iz $\mathbb{N}$

Tvrdnja je tačna za $k=1$

KORAK INDUKCIJE

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\;1 \\ 1\;2\;1 \\ 1\;3\;3\;1 \\ 1\;4\;6\;4\;1 \\ 1\;5\;10\;10\;5\;1 \end{array}$$

Pretpostavimo da je tvrdnja $5\mid(k^5-k)$ tačna za sve brojeve od 1 do n. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da $5\mid(n+1)^5-(n+1)$

$$(n+1)^5-(n+1) = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-n-1 =$$

$$= n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n-n =$$

$$= \underbrace{(n^5-n)}_{\text{ovo je prema pretpostavci djeljivo sa 5}} + \underbrace{5(n^4+2n^3+2n^2+n)}_{\text{ovo je djeljivo sa 5 (vidi se)}}$$

Prema tome $5\mid(n+1)^5-(n+1)$ što je i trebalo pokazati

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Dokazati matematičkom indukcijom da važi

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}\quad (x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}).$$

Rj: BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je jednakost tačna za broj 1

$$1=\frac{1+(-1)^0x^1}{1+x}=\frac{1+x}{1+x}=1$$

Jednakost je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $1-x+x^2-\ldots+(-1)^{k-1}x^{k-1}=\frac{1+(-1)^{k-1}x^k}{1+x}$ tačna za sve brojeve k od 1 do n i na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo $1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+X}$

$$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nx^n\ \underset{\text{pretpostavke}}{\overset{\text{na osnovu}}{=\!=\!=}}\ \frac{1+(-1)^{n-1}x^n}{1+x}+(-1)^nx^n=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}x^n+(-1)^nx^n\cdot(1+x)}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}+(-1)^n(1+x)]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+[(-1)^{n-1}(1+(-1)(1+x)]x^n}{1+x}=\frac{1+[(-1)^{n-1}\cdot(1-1-x]x^n}{1+x}=$$

$$=\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot(-1)x\cdot x^n}{1+x}=\frac{1+(-1)^nx^{n+1}}{1+x}$$

što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Matematičkom indukcijom dokazati da je $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ djeljivo sa 17 za svaki prirodan broj n.

Rj: $3\cdot5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17, $k\in\mathbb{N}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $3\cdot5^{2+1}+2^{3+1}=3\cdot5^3+2^4=3\cdot125+16=375+16=391$

$$\begin{array}{l}391:17=23\\ \underline{34}\\ \ \ 51\\ \ \ \underline{51}\\ \ \ =\!=\end{array}$$

Broj 391 jest djeljiv sa 17

Tvrdnja je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je $3\cdot5^{2k+1}+2^{3k+1}$ djeljivo sa 17 za svaki broj k od 1 do n. Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je $3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ djeljivo sa 17.

$$3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}=3\cdot5^{2n+3}+2^{3n+4}=3\cdot5^{2n+1}\cdot5^2+2^{3n+1}\cdot2^3=$$

$$=25(3\cdot5^{2n+1})+8(2^{3n+1})=17(3\cdot5^{2n+1})+8(3\cdot5^{2n+1})+$$

$$+8(2^{3n+1})=\underbrace{17\cdot(3\cdot5^{2n+1})}_{\text{vidimo da je ovo djeljivo sa 17}}+8\underbrace{(3\cdot5^{2n+1}+2^{3n+1})}_{\text{na osnovu pretpostavke ovo je djeljivo sa 17}}$$

Prema tome tvrdnja je tačna za $n+1$, tj. $3\cdot5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$ je djeljivo sa 17.

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za svaki prirodan broj n.

Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}.$$

Rj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, k je pozitivan cijeli br.

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot1+4} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ jednakost je tačna za $k=1$.

INDUKCISKI KORAK

Pretpostavimo da je jednakost tačna za $k=1,2,\dots,n$,

tj. $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{k^2+3k+2}=\frac{k}{2k+4}$, $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. da je

$(n+1)^2=n^2+2n+1$

$3(n+1)=3n+3$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2+3(n+1)+2}=\frac{n+1}{2(n+1)+4}$$

ili drugačije napisano $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{n+1}{2n+6}$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{n^2+3n+2}+\frac{1}{n^2+5n+5}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\frac{n}{2n+4}+\frac{1}{n^2+5n+6}$$

$n^2+5n+6=0$

$D=25-24=1$

$n_{1,2}=\frac{-5\pm1}{2}$

$n_1=\frac{-6}{2}=-3$ $n_2=\frac{-4}{2}=-2$

$$=\frac{n}{2(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+3)+2}{2(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^2+3n+2}{2(n+2)(n+3)}=\frac{\cancel{(n+2)}(n+1)}{2\cancel{(n+2)}(n+3)}=\frac{n+1}{2n+6}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

Dokazati metodom matematičke indukcije da za sve prirodne brojeve n važi

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Rj. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\frac{1^2}{1\cdot3}=\frac{1\cdot(1+1)}{2(2+1)}$ tj. $\frac{1}{3}=\frac{2}{2\cdot3}=\frac{1}{3}$

Jednakost je tačna za broj 1

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$ tačna za svako k od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za $n+1$ tj. dokažimo da je

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}.$$

$$\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)(2n+3)+(n+1)^2\cdot2}{2(2n+1)(2n+3)}=$$

$$=\frac{(n+1)[n(2n+3)+2(n+1)]}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+3n+2n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n^2+5n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$$ što je i trebalo dobiti

Jednakost je tačna za $n+1$.

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Dokazati metodom matematičke indukcije da vrijedi za sve $n \in \{2,3,4,\dots\}$:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}.$$

Rj. postavka zadatka:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \cdot \log_x 2^k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}, \quad k=2,3,\dots$$

BAZA INDUKCIJE

$$k=2: \quad \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2} = \frac{1}{\log_x 2\cdot 2\log_x 2} = \frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}$$

Tvrdnja je tačna za $k=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost $\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{k-1} \log_x 2^k} = \left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$ tačna za svako $k=2,3,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n}}_{\text{na osnovu pretpostavke}} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{\log_x 2^n \cdot \log_x 2^{n+1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{n\cdot(n+1)\log_x 2\cdot\log_x 2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} + \frac{1}{n(n+1)(\log_x 2)^2} = \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$= \left(1+\frac{-(n+1)+1}{n(n+1)}\right)\frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1+\frac{-n}{n(n+1)}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve brojeve $n \in \{2,3,4,\dots\}$

(#) Dokazati matematičkom indukcijom tvrdnju

$$7 \mid (n^7-n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rj. BAZA INDUKCIJE

Dokažimo da je tvrdnja tačna za broj 1.

$n=1: \quad n^7-n = 1^7-1=0, \quad 7 \mid 0 \quad (7 \text{ dijeli } 0)$

$0 = 7\cdot 0$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za brojeve od 1 do n tj. $7 \mid (k^7-k)$ za $k=1,2,3,\dots,n-1,n$. Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je tvrdnja tačna za $n+1$ tj: da $7 \mid [(n+1)^7-(n+1)]$.

$$n^7-n = n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) = \underline{\underline{n}}\underline{(n-1)}\underline{(n^2+n+1)}\underline{\underline{(n+1)}}(n^2-n+1)$$

$$(n+1)^7-(n+1) = (n+1)\left[(n+1)^6-1\right] = (n+1)\left[(n+1)^3-1\right]\left[(n+1)^3+1\right] =$$

$$= (n+1)\left[(n+1)-1\right]\left[(n+1)^2+n+1+1\right]\left[(n+1)+1\right]\left[(n+1)^2-(n+1)+1\right]$$

$$= \underline{\underline{(n+1)}}\,\underline{\underline{n}}\,(n^2+3n+3)(n+2)\underline{(n^2+n+1)}$$

Pronađimo vezu između $(n-1)(n^2-n+1)$ i $(n^2+3n+3)(n+2)$

$$\left.\begin{aligned}(n-1)(n^2-n+1) &= n^3-n^2+n-n^2+n-1 = n^3-2n^2+2n-1\\ (n+2)(n^2+3n+3) &= n^3+3n^2+3n+2n^2+6n+6 = n^3+5n^2+9n+6\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)(n^2+3n+3) = (n-1)(n^2-n+1) - 7n^2-7n-7$$

pa imamo: $(n+1)^7-(n+1) = (n+1)n(n^2+n+1)\left[(n-1)(n^2-n+1) - 7(n^2+n+1)\right]$

$$= (n+1)n(n^2+n+1)(n-1)(n^2-n+1) - 7(n+1)n(n^2+n+1)^2$$

$$= \underbrace{(n^7-n)}_{A} - \underbrace{7n(n+1)(n^2+n+1)^2}_{B}$$

$\left.\begin{array}{l}A \text{ je prema pretpostavci djeljivo sa } 7\\ B \text{ je očigledno djeljivo sa } 7\end{array}\right\} \rightarrow (n+1)^7-(n+1)$ je djeljivo sa 7 tj. $7 \mid (n+1)^7-(n+1)$

ZAKLJUČAK

Tvrdnja $7 \mid (n^7-n)$ je tačna za sve prirodne brojeve

5 Matematička indukcija

Zadatak 5.1 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n=1$:

$\mathcal{L}\equiv 2\cdot 1-1=2-1=1$

$\mathcal{D}\equiv 1^2=1$

Dakle, jednakost vrijedi za $n=1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. neka vrijedi

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$1+3+5+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2.$$

Dokaz

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= k^2+(2(k+1)-1)= \\ &= k^2+2k+1=(k+1)^2. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$

Zadatak 5.2 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n=1$:

$\mathcal{L}\equiv 1^3=1$

$\mathcal{D}\equiv\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^2=1$

Dakle, jednakost vrijedi za $n=1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. neka vrijedi

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3= \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3= \\ &= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}= \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4}= \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}= \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}= \\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2= \\ &= \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Zadatak 5.3 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n = 1$:

$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$

Dakle, jednakost vrijedi za $n = 1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)}{2(k+1)+1}.$$

Dokaz:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} = \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{(2k+1)\cdot(k+1)}{(2k+1)\cdot(2k+3)} = \frac{(k+1)}{(2k+3)} = \frac{(k+1)}{2(k+1)+1}. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k+1$.

Rješenja kvadratne jednačine $2k^2+3k+1 = 0$ su brojevi $k_1 = -\frac{1}{2}$ i $k_2 = -1$, pa je $2k^2+3k+1 = 2\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot(k+1) = (2k+1)\cdot(k+1)$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Zadatak 5.4 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n = 1$:

$\mathcal{L} \equiv \frac{1^2}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$

$\mathcal{D} \equiv \frac{1\cdot(1+1)}{2\cdot(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3}$

Dakle, jednakost vrijedi za $n = 1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2(2(k+1)+1)}.$$

Dokaz:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)\cdot(2(k+1)+1)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} = \\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k(2k+3)+2(k+1))}{2(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+3k+2k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2(2(k+1)+1)}. \end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k+1$.

Rješenja kvadratne jednačine $2k^2+5k+1 = 0$ su brojevi $k_1 = -\frac{1}{2}$ i $k_2 = -2$, pa je $2k^2+5k+1 = 2\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot(k+2) = (2k+1)\cdot(k+2)$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Zadatak 5.5 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}=1-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n=1$:

$\mathcal{L}\equiv\frac{2\cdot1+1}{1^2(1+1)^2}=\frac{3}{4}$

$\mathcal{D}\equiv1-\frac{1}{(1+1)^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

Dakle, jednakost vrijedi za $n=1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. neka vrijedi

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2\left(k+1\right)^2}=1-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)^2\left(\left(k+1\right)+1\right)^2}=1-\frac{1}{\left(\left(k+1\right)+1\right)^2}.$$

Dokaz:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2\left(k+1\right)^2}+\frac{2\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)^2\left(\left(k+1\right)+1\right)^2}=$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}+\frac{2\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)^2\left(\left(k+1\right)+1\right)^2}=\\
&= 1-\frac{1}{\left(k+1\right)^2}+\frac{2k+3}{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}=\\
&= 1-\frac{\left(k+2\right)^2-\left(2k+3\right)}{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}=1-\frac{k^2+4k+4-2k-3}{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}=\\
&= 1-\frac{k^2+2k+1}{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}=1-\frac{\left(k+1\right)^2}{\left(k+1\right)^2\left(k+2\right)^2}=\\
&= 1-\frac{1}{\left(k+2\right)^2}=1-\frac{1}{\left(\left(k+1\right)+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\left(k+1\right)^2}=1-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}.$$

Zadatak 5.6 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{5}{1\cdot2}+\frac{12}{2\cdot3}+\cdots+\frac{2n^2+2n+1}{n\cdot\left(n+1\right)}=\frac{n\left(2n+3\right)}{n+1}.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n=1$:

$\mathcal{L}\equiv\frac{5}{1\cdot2}=\frac{5}{2}$

$\mathcal{D}\equiv\frac{1(2\cdot1+3)}{1+1}=\frac{5}{2}$

Dakle, jednakost vrijedi za $n=1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. neka vrijedi

$$\frac{5}{1\cdot2}+\frac{12}{2\cdot3}+\cdots+\frac{2k^2+2k+1}{k\cdot\left(k+1\right)}=\frac{k\left(2k+3\right)}{k+1}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$\frac{5}{1\cdot2}+\frac{12}{2\cdot3}+\cdots+\frac{2\left(k+1\right)^2+2\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)\cdot\left(\left(k+1\right)+1\right)}=\frac{\left(k+1\right)\left(2\left(k+1\right)+3\right)}{\left(k+1\right)+1}$$

Dokaz:

$$\frac{5}{1\cdot2}+\frac{12}{2\cdot3}+\cdots+\frac{2k^2+2k+1}{k\cdot\left(k+1\right)}+\frac{2\left(k+1\right)^2+2\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)\cdot\left(\left(k+1\right)+1\right)}=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(2k+3)}{k+1} + \frac{2(k+1)^2+2(k+1)+1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)} = \\
&= \frac{k(2k+3)}{k+1} + \frac{2(k^2+2k+1)+2(k+1)+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{2k^2+3k}{k+1} + \frac{2k^2+4k+2+2k+2+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{2k^2+3k}{k+1} + \frac{2k^2+6k+5}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{(2k^2+3k)(k+2)+2k^2+6k+5}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{2k^3+4k^2+3k^2+6k+2k^2+6k+5}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{2k^3+9k^2+12k+5}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{2k^3+2k^2+7k^2+7k+5k+5}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{2k^2(k+1)+7k(k+1)+5(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)} = \\
&= \frac{(2k^2+7k+5)\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{2k^2+7k+5}{k+2} = \\
&= \frac{2k^2+2k+5k+5}{k+2} = \frac{(k+1)(2k+5)}{k+2} = \\
&= \frac{(k+1)(2(k+1)+3)}{(k+1)+1}
\end{aligned}
$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k+1$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+2k+1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

Zadatak 5.7 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$17 \mid 5^{n+3} + 11^{3n+1}.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n = 1$:

$$5^{1+3} + 11^{3\cdot1+1} = 5^4 + 11^4 = 625 + 14641 = 15266 = 17 \cdot 898$$

Dakle, jednakost vrijedi za $n = 1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka vrijedi

$$17 \mid 5^{k+3} + 11^{3k+1} \implies 5^{k+3} + 11^{3k+1} = 17A.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$17 \mid 5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1}$$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
5^{(k+1)+3} + 11^{3(k+1)+1} &= 5^{k+4} + 11^{3k+4} = 5^{k+3}\cdot 5 + 11^{3k+1}\cdot 11^3 = \\
&= 5^{k+3}\cdot 5 + 11^{3k+1}\cdot 1331 = \\
&= 5^{k+3}\cdot 5 + 11^{3k+1}\cdot(1326+5) = \\
&= 5^{k+3}\cdot 5 + 11^{3k+1}\cdot 5 + 11^{3k+1}\cdot 1326 = \\
&= 5\cdot\left(5^{k+3} + 11^{3k+1}\right) + 11^{3k+1}\cdot 1326 = \\
&= 5\cdot 17A + 11^{3k+1}\cdot 17\cdot 78 = \\
&= 17\left(5\cdot A + 11^{3k+1}\cdot 78\right) = 17B.
\end{aligned}
$$

gdje je $B = 5\cdot A + 11^{3k+1}\cdot 78$.

Dakle, jednakost vrijedi i za $n = k+1$.

4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Zadatak 5.8 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$19 \mid 7\cdot 5^{2n} + 12\cdot 6^n.$$

Rješenje:

1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n = 1$:

$$7\cdot 5^{2\cdot1} + 12\cdot 6^1 = 7\cdot 25 + 12\cdot 6 = 175 + 72 = 247 = 19\cdot 13.$$

Dakle, jednakost vrijedi za $n = 1$.

2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka vrijedi

$$19 \mid 7\cdot 5^{2n} + 12\cdot 6^n \implies 7\cdot 5^{2n} + 12\cdot 6^n = 19A.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi

$$19 \mid 7\cdot 5^{2(n+1)} + 12\cdot 6^{(n+1)}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
7\cdot 5^{2(n+1)}+12\cdot 6^{(n+1)} &= 7\cdot 5^{2n+2}+12\cdot 6^{n+1}=7\cdot 5^{2n}\cdot 25+12\cdot 6^{n}\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2n}\cdot(19+6)+12\cdot 6^{n}\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2n}\cdot 19+7\cdot 5^{2n}\cdot 6+12\cdot 6^{n}\cdot 6= \\
&= 7\cdot 5^{2n}\cdot 19+6\cdot\left(7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^{n}\right)= \\
&= 7\cdot 5^{2n}\cdot 19+6\cdot 19A=19\left(7\cdot 5^{2n}+6A\right)=19B.
\end{aligned}$$

gdje je $B=7\cdot 5^{2n}+6A$.
Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.
4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.

Zadatak 5.9 *Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)\,x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Rješenje:
1) Provjerimo da li jednakost vrijedi za $n=1$:
$\mathcal{L}\equiv\sin x$
$\mathcal{D}\equiv\frac{\sin^2 x}{\sin x}=\sin x$
Dakle, jednakost vrijedi za $n=1$.
2) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n=k$, tj. neka vrijedi

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2k-1)\,x=\frac{\sin^2 kx}{\sin x}.$$

3) Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n=k+1$, tj. da vrijedi

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2(k+1)-1)\,x=\frac{\sin^2(k+1)\,x}{\sin x}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
&\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2k-1)\,x+\sin(2(k+1)-1)\,x= \\
&=\frac{\sin^2 kx}{\sin x}+\sin(2k+1)\,x=\frac{\sin^2 kx+\sin x\cdot\sin(2k+1)\,x}{\sin x}= \\
&=\frac{\sin^2 kx+\frac{1}{2}\left[\cos 2kx-\cos(2kx+2x)\right]}{\sin x}= \\
&=\frac{\frac{2\sin^2 kx+\cos 2kx-\cos(2kx+2x)}{2}}{\sin x}=\frac{2\sin^2 kx+\cos 2kx-\cos 2(k+1)\,x}{2\sin x}= \\
&=\frac{2\sin^2 kx+\cos^2 kx-\sin^2 kx-\cos^2(k+1)\,x+\sin^2(k+1)\,x}{2\sin x}= \\
&=\frac{\sin^2 kx+\cos^2 kx-\cos^2(k+1)\,x+\sin^2(k+1)\,x}{2\sin x}= \\
&=\frac{1-\cos^2(k+1)\,x+\sin^2(k+1)\,x}{2\sin x}=\frac{\sin^2(k+1)\,x+\sin^2(k+1)\,x}{2\sin x}= \\
&=\frac{2\sin^2(k+1)\,x}{2\sin x}=\frac{\sin^2(k+1)\,x}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost vrijedi i za $n=k+1$.
4) Jednakost vrijedi za svaki prirodan broj n.
Napomena: Jednakost kraće možemo zapisati

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)\,x=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Polinomi

Polinom stepena n je oblika $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$.

Bezoutova teorema Ostatak djeljenja polinoma $f(x)$ sa linearnim polinomom $x-c$ $(c\in\mathbb{C})$ jednak je $f(c)$.

Posljedica Broj $c\in\mathbb{C}$ je korijen polinoma $f(x)$ akko je $f(x)$ djeljiv sa $x-c$.

1. Rastaviti na faktore polinom $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$.

Rj. I način:

$x=1:\quad f(1)=1+2-7-8+12=15-15=0$

Kako je $f(1)=0$ to je polinom $f(x)$ djeljiv sa $x-1$.

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3-7x^2-8x+12):(x-1)=x^3+3x^2-4x-12\\
-\underline{x^4-x^3}\\
\quad 3x^3-7x^2-8x+12\\
\quad -\underline{3x^3-3x^2}\\
\qquad -4x^2-8x+12\\
\qquad -\underline{-4x^2+4x}\\
\qquad\quad -12x+12\\
\qquad\quad \underline{-12x+12}\\
\qquad\quad =\ =
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4x-12)$

$x=2:\quad f(2)=1\cdot(2^3+3\cdot4-8-12)=8+12-8-12=0$

Kako je $f(2)=0$ to je polinom $f(x)$ djeljiv sa $x-2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-4x-12):(x-2)=x^2+5x+6\\
-\underline{x^3-2x^2}\\
\quad 5x^2-4x-12\\
\quad -\underline{5x^2-10x}\\
\qquad 6x-12\\
\qquad -\underline{6x-12}\\
\qquad =\ =
\end{array}
$$

$f(x)=(x-1)(x-2)\underbrace{(x^2+5x+6)}_{(x+2)(x+3)}$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

polinom rastavljen na faktore

II način: Hornerov algoritam

$f(2)=0 \Rightarrow$ Polinom $f(x)$ je djeljiv sa $x-2$

$f(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

	1	2	-7	-8	12
2	1	$2\cdot1+2=4$	$2\cdot4-7=1$	$2\cdot1-8=-6$	$-12+12=0$

$f(x)=(x-2)(x^3+4x^2+x-6)$

$g(x)=x^3+4x^2+x-6$

$g(1)=1+4+1-6=0 \Rightarrow$ Polinom $g(x)$ je djeljiv sa $x-1$

	1	4	1	-6
1	1	$1\cdot1+4=5$	$1\cdot5+1=6$	$1\cdot6-6=0$

$g(x)=(x-1)(x^2+5x+6)$

$f(x)=(x-2)(x-1)\underbrace{(x^2+5x+6)}_{(x+2)(x+3)}=(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

2. Polinom $f(x)=x^4+2x^3-25x^2-26x+120$ rastaviti na faktore.

Rj. I način

$f(1)=1+2-25-26+120\neq0$

$f(-1)=1-2-25+26+120\neq0$

$f(2)=16+16-100-52+120=32+20-52=0 \Rightarrow f(x)$ je djeljiv sa $x-2$

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3-25x^2-26x+120):(x-2)=x^3+4x^2-17x-60\\
-\underline{x^4-2x^3}\\
\quad 4x^3-25x^2-26x+120\\
\quad -\underline{4x^3-8x^2}\\
\qquad -17x^2-26x+120\\
\qquad -\underline{-17x^2+34x}\\
\qquad\quad -60x+120\\
\qquad\quad \underline{-60x+120}\\
\qquad\quad =\ =
\end{array}
$$

$f(x)=(x-2)(x^3+4x^2-17x-60)$

$g(x)=x^3+4x^2-17x-60$

$g(3) = 27+36-51-60 \neq 0$

$g(-3) = -27+36+51-60 = 87-87 = 0$

polinom $g(x)$ je djeljiv sa $x+3$

$$
\begin{array}{l}
(x^3+4x^2-17x-60):(x+3) = x^2+x-20 \\
\underline{-\ x^3+3x^2} \\
\quad x^2-17x-60 \\
\quad \underline{-\ x^2+3x} \\
\qquad -20x-60 \\
\qquad \underline{-20x-60} \\
\qquad =\quad =
\end{array}
$$

$f(x) = (x-2)(x+3)\underbrace{(x^2+x-20)}_{(x-4)(x+5)}$

$f(x) = (x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$

polinom rastavljen na faktore

II način: Hornerov Algoritam

$f(x) = x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

$f(4) = 256+128-400-104+120 = 504-504 = 0 \Rightarrow f(x)$ je djeljiv sa $(x-4)$

	1	2	-25	-26	120
4	1	$4\cdot1+2=6$	$4\cdot6-25=-1$	$(-1)\cdot4-26=-30$	$4\cdot(-30)+120=0$

$f(x) = (x-4)(x^3+6x^2-x-30)$

$g(x) = x^3+6x^2-x-30$

$g(-5) = -125+150+5-30 = 125-125 = 0 \Rightarrow g(x)$ je djeljiv sa $(x+5)$

	1	6	-1	-30
-5	1	$-5+6=1$	$-5-1=-6$	$30-30=0$

$g(x) = (x+5)\underbrace{(x^2+x-6)}_{(x-2)(x+3)}$ $\qquad f(x) = (x-4)(x+5)(x-2)(x+3)$

3.) Rastaviti na faktore polinom $f(x) = x^5-x^4-37x^3+61x^2+336x-720$

Rj. $f(x) = (x-3)^2(x-4)(x+4)(x+5)$ $\qquad f(x) = x^5-x^4-37x^3+61x^2+336x-720$

\# Naći ostatak pri djeljenju polinoma $p(x)$ sa $(x-1)(x^2+1)$ ako je ostatak pri djeljenju $p(x)$ sa $x-1$ jednak 1 a sa x^2+1 jednak $x+2$.

Rj. $p(x) = (x-1)(x^2+1)g(x)+ax^2+bx+c \qquad (1)$

$p(x) = (x-1)g_1(x)+1 \qquad (2)$

$p(x) = (x^2+1)g_2(x)+x+2 \qquad (3)$

ostatak djeljenja $p(x)$ sa $x-1$ je $p(1)$.

(2): $p(1) = 1$

(1): $p(1) = a+b+c$

ostatak djeljenja $p(x)$ sa $x^2+1=(x-i)(x+i)$ je $p(i)$ i $p(-i)$

$$
\left.\begin{array}{l}
(3):\ p(i) = i+2 \\
(1):\ p(i) = -a+ib+c
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b=1 \\ c-a=2 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
a+1+c=1 \\
\underline{-a\ \ +c=2} \\
a+c=0 \\
\underline{-a+c=2} \\
2c=2 \\
c=1 \Rightarrow a=-1
\end{array}
$$

Ostatak djeljenja polinoma $p(x)$ sa $(x-1)(x^2+1)$ je $-x^2+x+1$

\# Dokazati da je polinom $P_{2n+1}(x) = (x+a+b)^{2n+1}-x^{2n+1}-a^{2n+1}-b^{2n+1}$ djeljiv sa $P_3(x)$ za $\forall(n\in N)$.

uputa:

$P_3(x) = \ldots = 3(a+b)(x+a)(x+b)$

$P_{2n+1}(-a) = \ldots = 0 \Rightarrow x+a \mid P_{2n+1}(x)$ (ovo se čita: $x+a$ dijeli $P_{2n+1}(x)$)

$P_{2n+1}(-b) = \ldots = 0 \Rightarrow x+b$ dijeli $P_{2n+1}(x)$

(#) Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)=x^{200}-3x^{199}-1$ polinomom x^2-4x+3.

Rj: $g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

Kad neki polinom $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ dijelimo nekim polinomom $g(x)=b_kx^k+\ldots+b_1x+b_0$ ostatak $r(x)$ može biti najviše stepena $k-1$.

$$p(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$$

$$f(x)=x^{200}-3x^{199}-1=(x^2-4x+3)q(x)+ax+b=(x-1)(x-3)+ax+b$$

$f(3)=0+3a+b$
$f(1)=0+a+b \quad \ldots(*)$

$f(x)=x^{200}-3x^{199}-1$
$f(1)=1-3-1=-3$
$f(3)=3^{200}-3\cdot 3^{199}-1=-1 \quad \ldots(**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$
$$\begin{array}{l} 3a+b=-1 \\ -\ \ a+b=-3 \\ \hline 2a=2 \end{array}$$
$a=1 \Rightarrow b=-4$

Ostatak dijeljenja polinoma $f(x)$ sa polinomom x^2-4x+3 je $x-4$.

(#) Odrediti koeficijente a,b,c polinoma $f(x)=ax^2+bx+c$ tako da bude $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^2$, $\forall(n\in N)$.

Rj: $f(n)=an^2+bn+c \quad \ldots(*)$

$f(n)=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)-f(1)-f(2)-\ldots-f(n-1)$
$=(f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)+f(n))-(f_1+f(2)+\ldots+f(n-1))$
$=n^2-(n-1)^2=n^2-n^2+2n-1=2n-1 \quad \ldots(**)$

$(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ $a=0,\ b=2,\ c=-1$.

(#) U skupu N definisana je f-ja f sa $f(n)=f(n-1)+a^n$, $n\geq 2$ i $f(1)=1$. Izraziti $f(n)$ pomoću a i n. Razmotriti slučajeve $a\neq 1$ i $a=1$.

Rj. $f(n)=f(n-1)+a^n,\ n\geq 2$
$f(1)=1$

$f(2)=f(1)+a^2=1+a^2$
$f(3)=f(2)+a^3=1+a^2+a^3$
$\vdots$
$f(n)=f(n-1)+a^n=1+a^2+a^3+\ldots+a^n$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} z^n=z\cdot\frac{1-z^{N+1}}{1-z}}$$

za $a=1$:
$f(n)=1+1^2+1^3+\ldots+1^n=n$

za $a>1$:
$f(n)=1+a^2+a^3+\ldots+a^n$
$=1+a^2(1+a+\ldots+a^{n-2})$
$=1+a^2\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-a}=$
$=\frac{1}{1-a}(1-a+a^2(1-a^{n-1}))$
$=\frac{1}{1-a}(1-a+a^2-a^{n+1})$
$=\frac{1}{a-1}(a^{n+1}-a^2+a-1)$

Prema tome

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{a-1}(a^{n+1}-a^2+a-1), & \text{za } a\neq 1\\ n, & \text{za } a=1\end{cases}$$

(istu vrijednost dobijemo i za $a<1$)

(#) Odrediti brojeve A i B tako da polinom $f(x)=Ax^{n+1}+Bx^n+1$, $n\in N$ bude djeljiv sa x^2-2x+1.

Uputa:

$f(1)=A+B+1=0$
$f(x)=\ldots=-Bx^n(x-1)-(x-1)(x^n+x^{n-1}+\ldots+x+1)=$
$=(x-1)(-Bx^n-x^n-x^{n-1}-\ldots-x-1)=(x-1)g(x)$

$g(1)=0 \Rightarrow \ldots B=-n-1 \Rightarrow A=n$

(#) Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^na-b$, $a,b\in C$. Odrediti a i b tako da ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa x^2-3x+2 bude $(2^n-1)x$. Rj. $a=1$, $b=2$

\# Odrediti koeficijente a, b, c tako da polinom $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ bude djeljiv polinomima $x-1$ i $x+2$ a pri djeljenju sa $x-4$ daje ostatak 18.

Rj. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

ostatak djeljenja polinoma $f(x)$ sa linearnim polinomom $x-c$ jednak je $f(c)$

$p(x)$ djeljiv sa $x-1 \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow 1+a+b+c=0$

$p(x)$ djeljiv sa $x+2 \Rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow -8+4a-2b+c=0$

$p(x)$ pri djeljenju sa $x-4$ daje ostatak $18 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(4)=18 \Rightarrow 64+16a+4b+c=18$$

Sistem tri jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{aligned} a+b+c&=-1 \quad (1)\\ 4a-2b+c&=8 \quad (2)\\ 16a+4b+c&=-46 \quad (3) \end{aligned}$$

$(2)-(1)$: $3a-3b=9$

$(2)-(1)$: $15a+3b=-45$

$18a=-36$

$a=-2$

$-3b=9+6$

$b=-5$

$-2-5+c=-1$

$c=6$

Traženi koeficijenti su $a=-2$, $b=-5$, $c=6$

\# Dokazati da je polinom $f(x)=(\cos\varphi+x\sin\varphi)^n-\cos n\varphi-x\sin n\varphi$ djeljiv sa x^2+1.

Uputa: $x^2+1=(x-i)(x+i)$

$$\left.\begin{aligned} f(i)&=\ldots=0\\ f(-i)&=\ldots=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-i)(x+i) \mid f(x)$$

8. POLINOMI

Zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka i problema iz Matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci;
Behdžet A. Mesihović, Šefket Z. Arslanagić;

1. *Funkcija oblika*

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_kx^{n-k}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=\sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$, gdje je n prirodan broj, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(a_0 \neq 0)$ realni ili kompleksni brojevi, a x realna ili kompleksna promjenljiva, naziva se *polinom* ili *cijela racionalna funkcija*. Broj n naziva se *stepen* polinoma.

2. *Osnovni stav algebre* (ili Gausov* stav) glasi:
Svaki polinom stepena $n(\geqslant 1)$ ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.

3. *Bezuova*** teorema*. Pri dijeljenju polinoma $P_n(x)$ razlikom $(x-x_1)$ dobija se ostatak koji je jednak $P_n(x_1)$. Kao posljedica Bezuovog stava izvodi se slijedeća teorema: ako je x_1 nula polinoma, tj. $P_n(x_1)=0$, onda je polinom $P_n(x)$ djeljiv (bez ostatka) razlikom $(x-x_1)$.

4. Na osnovu Gausovog i Bezuovog stava izvodi se slijedeća teorema: svaki polinom n-tog stepena može se napisati u obliku:

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma, a $a_0 \neq 0$ koeficijent uz x^n.

5. Ako polinom $P_n(x)$ ima jednu nulu oblika $a+bi$, onda mora imati i drugu nulu oblika $a-bi$, ukoliko su koeficijenti polinoma realni brojevi.

6. a) Kaže se da su polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ *identički jednaki* ako dobiju jednake vrijednosti za svako x.
b) Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki.

7. *Vietove*** formule*
Posmatrajmo polinom

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

* Carl Friedrich Gauss (1777–1855), njemački matematičar.
** Etienne Bézout (1730–1783), francuski matematičar.
*** François Viète (1540–1603), francuski matematičar.

i predstavimo ga u obliku

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nule polinoma $P_n(x)$.

Iz identiteta

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

prema stavu 6.b), slijede formule:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_k+\ldots+x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n=(-1)^k\frac{a_k}{a_0},$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

8. Ako algebarska jednačina n-tog stepena $P_n(x)=0$ sa cijelim koeficijentima $a_k \in Z$, $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ ima racionalan korijen $\frac{p}{q}$, $(p \in Z,\ q \in N)$, $(p, q)=1$, tada je p djelitelj od a_n i q djelitelj od a_0.

9. Svaki polinom $P_n(x)$ stepena n može se, na jedinstven način, predstaviti u obliku

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r},$$

gdje su svi $x_1, x_2, \ldots, x_r$ različiti brojevi, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ prirodni brojevi, takvi da je $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$ i a_0 koeficijent uz najstariji član polinoma $P_n(x)$.

Broj k_i zovemo redom *višestrukosti* korijena x_i $(i=\overline{1, r})$.

10. *Hornerov* postupak (shema)*

Pri dijeljenju polinoma

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

binomom $x-x_1$, dolazimo do identiteta

$$P_n(x)=(x-x_1)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-1})+R,$$

* William George Horner (1773–1827).

gdje je R ostatak dijeljenja nezavisan od x i gdje su $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ privremeno neodređeni koeficijenti.

Za izračunavanje koeficijenata b_k $(k=\overline{0, n-1})$ i ostatka R praktično je upotrijebiti *Hornerov postupak* (shemu), koji se zapisuje ovako:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
x_1 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k+1} & \cdots & a_n \\
\hline
 & a_0 & \underbrace{x_1 b_0 + a_1} & \underbrace{x_1 b_1 + a_2} & \cdots & \underbrace{x_1 b_k + a_{k+1}} & \cdots & \underbrace{x_1 b_{n-1} + a_n} \\
 & =b_0 & =b_1 & =b_2 & & =b_{k+1} & & =R.
\end{array}$$

11. Prostim ili parcijalnim razlomcima (u polju realnih brojeva) smatraju se funkcije oblika:

$$x \to \frac{A}{(x-a)^k}, \ (k \in N;\ A,\ a \in R); \ x \to \frac{MX+N}{(x^2+px+q)^k}, \ (k \in N,\ p^2-4q<0).$$

12. Svaka nesvodljiva prava racionalna funkcija $x \to \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m<n)$ može se na jedinstven način rastaviti na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}, \text{ gdje je } k \text{ red korijena } a \text{ i}$$

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

gdje je l red faktora x^2+px+q u polinomu $Q_n(x)$ $(p^2-4q<0)$, tj. kvadratni faktor odgovara paru konjugovano kompleksnih korijena reda l realnog polinoma $Q_n(x)$).

ZADACI

1. Neka je $P(x)$ polinom petog stepena i neka on ima jednu trostruku nulu $x=1$ i jednu dvostruku nulu $x=-2$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(2)=48$.

2. Odrediti realan polinom najmanjeg stepena čije su nule:
a) $x_1=2,\ x_2=1+i,\ x_3=1+2i$; b) $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=1-i$.

3. Podijeliti slijedeće polinome:
a) $2x^4-3x^3+4x^2+5x+6$ sa x^2-3x+1; b) x^3-3x^3-x-1 sa $3x^2-2x+1$.

4. Neka je $P(x)$ realan polinom četvrtog stepena i neka on ima nule prvog reda $x=-1$, $x=2$ i $x=2+i$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(0)=20$.

5. Neka je $P(x)$ realan polinom petog stepena i neka on ima dvostruku nulu $x=2i$. Odrediti polinom $P(x)$ ako je $P(0)=-8$ i $P(2)=32$.

6. Ako je $x=2$ nula polinoma $x^3-6x^2+21x-26$, odrediti ostale nule toga polinoma.

7. Odrediti racionalne brojeve p i q, tako da $x_1=1+\sqrt{3}$ bude nula polinoma $P(x)=x^4+px^3+qx^2+6x+2$. Za tako određene vrijednosti parametara p i q naći ostale nule polinoma $P(x)$.

8. Pokazati da je kompleksan broj $x_1=1+i$ nula polinoma x^3-2x+4, a zatim odrediti ostale nule toga polinoma.

9. Naći nule polinoma $P(x)=x^4+1$.

10. Odrediti realne brojeve p i q, tako da $x=1$ bude dvostruka nula polinoma

$P(x)=px^4+qx^3-x+1$.

Za tako određene vrijednosti p i q naći ostale nule polinoma $P(x)$.

11. Pokazati da je polinom $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ potpun kvadrat.

12. Odrediti ostatak pri dijeljenju polinoma x^8-2x^5+1 polinomom x^2-1.

13. Odrediti koeficijente a, b, c realnog polinoma $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$, tako da:
a) polinom bude djeljiv binomima $x-1$, $x+2$, a da podijeljen binomom $x-4$ daje ostatak 18;
b) polinom bude djeljiv binomom $x-i$, a da podijeljen binomom $x+1$ daje ostatak -5.

14. Pokazati da je polinom $P_n(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$:
a) $P_n(x)=(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x+1$, $Q(x)=2x^3-3x^2+x$, $n \in N$;
b) $P_n(x)=x^{6n+2}+x^{3n+1}+1$, $Q(x)=x^2+x+1$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$;
c) $P_n(x)=x(x^{n-1}-na^{n-1})+a^n(n-1)$, $Q(x)=(x-a)^2$.

15. Pokazati da su polinomi:
a) $x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$; b) $x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^{n-1}$;
c) $(n-2m)x^n-nx^{n-m}+nx^m-(n-2m)$ djeljivi sa $(x-1)^3$.

16. Dat je polinom $x^3-6x^2-\lambda$, $\lambda \in R$. Diskutirati broj i prirodu korijena ovog polinoma za razne λ.

17. U kojim granicama mora varirati λ da bi jednačina $3x^4-4x^3-12x^2+\lambda=0$ imala sva četiri realna korijena?

18. Data je algebarska jednačina $ax^6+bx+1=0$, $(a, b \in R)$. Odrediti a i b, tako da je $x=1$ dvostruki korijen jednačine.

19. Odrediti racionalne korijene polinoma:
a) $x^4+2x^3-13x^2-38x-24$; b) $x^3-6x^2+15x-14$;
c) $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$; d) $2x^3+3x^2-1$.

20. Napisati Viètove formule za polinome:
a) trećeg stepena $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$;
b) četvrtog stepena $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$.

21. Znajući da je zbir dva korijena jednačine $2x^3-x^2-7x+\lambda=0$ jednak 1, odrediti parametar λ.

22. Dat je polinom $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$, $P(2)=0$. Pomoću Viètovih formulâ naći ostale korijene jednačine $P(x)=0$.

23. Naći ostale nule realnog polinoma $P(x)=x^3+a^2x+10a^3$ ako se zna da je jedna nula $x_1=a(1+2i)$.

24. Naći vezu između koeficijenata a, b, c, tako da korijeni jednačine $x^3+ax^2+bx+c=0$ obrazuju geometrijsku progresiju.

25. Odrediti realan parametar a, tako da konjugovano kompleksni korijeni jednačine $z^4-2az^3+18z^2-24z+16=0$ budu tjemenâ trapeza čiji produžeci krakova prolaze kroz koordinatni početak.

26. Koristeći Hornerovu shemu, napisati rezultat dijeljenja polinoma $15x^4-13x^3+2x-1$ binomom $x-2$.

27. Ispitati pomoću Hornerove sheme da li je:

a) $x=2$ jednostruka nula; b) $x=3$ dvostruka nula

polinoma $P_5(x)=x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18$.

28. Polinom $x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x+5$ razviti po stepenima osnove $x-1$ pomoću Hornerove sheme.

29. Dokazati identitet

$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1})$, $n\in N$.

30. Ako je n paran broj, tada polinom $P(x)=(x+1)^n-x^n-1$ nije djeljiv sa x^2+x+1. Dokazati.

31. Odrediti polinom $P(x)$ petog stepena koji zadovoljava ova dva uslova:

(1) $(x-1)^3|\{P(x)+1\}$, (2) $(x+1)^3|\{P(x)-1\}$.

32. $P(x)$ je polinom čiji su koeficijenti cijeli brojevi. Pokazati da iz uslova $6|P(2)$ i $6|P(3)$ slijedi $6|P(5)$.

33. Pri kakvim uslovima vrijedi:

a) x^2+mx-1 je djelitelj od x^3+px+q;

b) x^2+mx+1 je djelitelj od x^4+px+q.

34. Uprostiti polinom

$$P_n(x)=1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}.$$

35. Koristeći Hornerovu shemu, razložiti polinom $P(x)$ po stepenima od $x-x_0$:

a) $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=-1$; b) $P(x)=x^5$, $x_0=1$;

c) $P(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90$, $x_0=2$;

d) $P(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$.

36. Koristeći Hornerovu shemu, razložiti po stepenima od x $P(x+3)$ ako je $P(x)=x^4-x^3+1$.

37. Rastavi na linearne faktore:

a) $\cos(n\arccos x)$; b) $(x+\cos a+i\sin a)^n-(x-\cos a-i\sin a)^n$.

38. Razložiti na nerazložive realne faktore slijedeće polinome:

a) x^4+4; b) x^6+27; c) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

d) $x^{2n}-2x^n+2$; e) x^4-ax^2+1, $|a|<2$.

39. Provjeriti razlaganja racionalnih funkcija na proste razlomke:

a) $\dfrac{x-1}{x^3+3x^2+2x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+1}$;

b) $\dfrac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}$;

c) $\dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{3}{8}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{8}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{-x/2-1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{x+1}{x^2+1}$;

d) $\dfrac{2x^4+2x^2-5x+1}{x(x^2+x+1)^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-3}{x^2+x+1}+\dfrac{x-4}{(x^2+x+1)^2}$;

e) $\dfrac{2n+1}{x^{2n-1}-1}=\dfrac{1}{x-1}+2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}-1}{x^2-2x\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+1}$;

f) $\dfrac{n}{x^{2n}-1}=\dfrac{1}{x^2-1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{x\cos\dfrac{k\pi}{n}-1}{x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1}$;

g) $\dfrac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{x-k}$;

h) $\dfrac{(2n)!}{x(x^2-1)(x^2-4)\ldots(x^2-n^2)}=\sum\limits_{k=-n}^{n}(-1)^{n-k}\dbinom{2n}{n+k}\dfrac{1}{n-k}$.

40. Dokazati da postoji broj a takav da je polinom $x^6-15x^3-8x^2+2$ djeljiv polinomom x^2+ax+1.

41. Koristeći identitet

(1) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}\right)$,

dokazati

$$(2)\quad \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}\right)+\frac{2}{(a-b)^3}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right);$$

$$(3)\quad \frac{1}{(x-a)^3(x-b)^3}=\frac{1}{(a-b)^3}\left(\frac{1}{(x-a)^3}-\frac{1}{(x-b)^3}\right)-$$

$$-\frac{3}{(a-b)^4}\left(\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{(x-b)^2}\right)+\frac{6}{(a-b)^5}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right).$$

RJEŠENJA

1. Polinom $P(x)$ ima oblik $P(x)=a_0(x-1)^3(x+2)^2$. Iz uslova $P(2)=48$ slijedi da je $a_0=3$. Prema tome, biće $P(x)=3(x-1)^3\cdot(x+2)^2$.

2. a) Imamo $x_4=\overline{x}_2=1-i$, $x_5=\overline{x}_3=1-2i$, te je
$$P_5(x)=(x-2)(x-1-i)(x-1+i)(x-1+2i)(x-1-2i)=(x-2)(x^2-2x+2)(x^2-2x+5);$$
b) $x_4=\overline{x}_3=1+i$, te je $P_4(x)=(x-1)(x-2)(x-1+i)(x-1-i)=(x-1)(x-2)(x^2-2x+2)$.

3. a) Količnik je $2x^2+3x+11$, ostatak $35x-5$; b) količnik je $\frac{1}{9}(3x-7)$, ostatak je $\frac{1}{9}(-26x-2)$.

4. Nula polinoma $P(x)$ je i kompleksan broj $\overline{x}=2-i$. Polinom ima oblik $P(x)=a_0(x+1)(x-2)(x^2-4x+5)$. Iz uslova $P(0)=20$ slijedi da je $a_0=-2$. Dakle, biće $P(x)=-2(x+1)(x-2)(x^2-4x+5)$.

5. $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x^2+4)^2$.

6. Ako je $x_1=2$ nula polinoma $x^3-6x^2+21x-26$, dijeljenjem tog polinoma bionomom $x-2$ dobijamo $x^2-4x+13=0$, tj. $x_{2,3}=2\pm 3i$.

7. Kako je $x_1=1+\sqrt{3}$ nula polinoma $P(x)$ sa racionalnim koeficijentima, onda je njegova nula i realan broj $x_2=1-\sqrt{3}$. Stoga je polinom $P(x)$ djeljiv polinomom x^2-2x+2. Iz identiteta
$$x^4+px^3+qx^2+6x+2\equiv(x^2-2x-2)(x^2+bx+c)$$
dobijamo $p=-4$ i $q=1$. Dakle, ostale nule polinoma $P(x)$ su $x_3=1+\sqrt{2}$ i $x_4=1-\sqrt{2}$.

8. Imamo $(1+i)^3-2(1+i)+4=1+3i+3i^2+i^3-2i-2+4=1+3i-3-i-2i+2=0$.

9. Polinom $P(x)$ možemo predstaviti u obliku
$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1),$$ odakle dobijamo
$$x_{1,2}=(1\pm i)\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_{3,4}=(-1\pm i)\frac{\sqrt{2}}{2},$$ nule polinoma $P(x)$.

10. $p=1$, $q=-1$, $x_3=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $x_4=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.

11. $(x^2+3x+1)^2$.

12. Odredimo realne brojeve p i q iz identiteta $x^8-2x^5+1=(x^2-1)K(x)+px+q$,
gdje je $K(x)$ polinom osmog stepena. Odatle za $x=1$ i $x=-1$ dobijamo sistem jednačina $p+q=0$, $-p+q=4$, čije je rješenje $p=-2$, $q=2$. Dakle, ostatak pri dijeljenju polinoma je $-2x+2$.

13. a) Iz uslova $P(1)=0$, $P(-2)=0$ i $P(4)=18$ dobijamo sistem jednačina: $a+b+c=-1$, $4a-2b+c=8$, $16a+4b+c=-46$, čije je rješenje $a=-2$, $b=-5$, $c=6$; dakle, $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$;

b) iz uslova $P(i)=0$, $(P(-i)=0)$, $P(-1)=-5$ dobijamo polinom $P(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

14. a) Nule polinoma $Q(x)=2x^3-3x^2+x$ su $x=0$, $x=1$ i $x=\frac{1}{2}$. Za te iste vrijednosti se anulira i polinom $P_n(x)=(x-1)^{2n}-x^{2n}+2x-1$, pa je prema Bezuovom stavu tvrđenje tačno;

b) nule polinoma $Q(x)=x^2+x+1$ su $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$, odnosno $x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, $x_2=\overline{x}_1$. Lako se provjerava da je i x_1 nula polinoma $P_n(x)$ (koristiti Moavrovu formulu). Naravno, $x_2=\overline{x}_1$ mora, takođe, biti nula polinoma $P_n(x)$. Znači, polinom $P_n(x)$ je djeljiv polinomom $Q(x)$.

c) rastavljajući polinom $P_n(x)$ na faktore, dobija se da je jedan njegov faktor $(x-a)^2$, što znači da je polinom $P_n(x)$ djeljiv polinomom $Q(x)$.

15. a), b), c) Treba provjeriti da važi $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$.

16. Posmatrati funkcije $y=x^3-6x^2$ i $y=\lambda$ i nacrtati njihove grafike. Dobijamo: za $\lambda\in(-\infty,-32)$ polinom ima jedan realan korijen; za $\lambda=-32$ tri realna korijena od kojih je jedan dvostruki; za $\lambda\in(-32,0)$ tri realna različita korijena; za $\lambda=0$ tri korijena od kojih je jedan dvostruki; za $\lambda>0$ jedan realan korijen.

17. Ispitati funkciju $y=\lambda=-3x^4+4x^3+12x^2$; $\lambda\in[0,5]$.

18. Treba da je $f(1)=0$ i $f'(1)=0$, tj. $a+b+1=0$ i $6a+b=0$. Odavde dobijamo da je $a=\frac{1}{5}$, $b=-\frac{6}{5}$.

19. a) Koristeći 8., nalazimo korijene $x\in\{-1,-2,-3,4\}$;

b) $x=2$; c) $x\in\{1,-2,3\}$; d) $x\in\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$, $x_1=-1$ je dvostruki korijen.

20. a) $x_1+x_2+x_3=-\frac{a_1}{a_0}$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_2}{a_0}$; $x_1x_2x_3=-\frac{a_3}{a_0}$;

b) $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a_1}{a_0}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{a_2}{a_0}$,

$x_1x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4=-\frac{a_3}{a_0}$, $x_1x_2x_3x_4=\frac{a_4}{a_0}$.

21. Prema Viètovim formulama $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, $x_1x_2+(x_1+x_2)x_3=-\frac{7}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{\lambda}{2}$, a prema pretpostavci da je $x_1+x_2=1$, odavde dobijamo da je $x_3=-\frac{1}{2}$ i $x_1x_2=-3$, te je $\lambda=-3$.

22. Imamo $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5$, $x_1x_2x_3=6$; te zbog $x_3=2$ je $x_1+x_2=-4$, $x_1x_2=3$, tj. $x_1=-1$, $x_2=-3$.

23. Pošto je $x_1=a(1+2i)$, to je $x_2=\overline{x}_1=a(1-2i)$, a odavde $x_1x_2=5a^2$. Iz Viètove formule $x_1x_2x_3=-10a^3$ dobijamo sada $x_3=-2a$.

24. Imamo x_1, $x_2=x_1q$, $x_3=x_1q^2$. Iz Viètovih formulá dobijamo vezu $a^3c=b^3$.

25. Stavljajući da je $z_1=\varrho_1\operatorname{cis}\varphi$, $z_3=\overline{z}_1=\varrho_1\operatorname{cis}(-\varphi)$, $z_2=\varrho_2\operatorname{cis}\varphi$, $z_4=\overline{z}_2=\varrho_2\operatorname{cis}(-\varphi)$ u Viètove formule $z_1+\overline{z}_1+z_2+\overline{z}_2=2a$, $z_1\overline{z}_1+z_1z_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_2=18$, $z_1\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2\overline{z}_2+z_1z_2\overline{z}_2=24$, $z_1\overline{z}_1z_2\overline{z}_2=16$, dobijamo $a=3$.

26. Rezultat dijeljenja polinoma $15x^4-13x^3+2x-1$ sa $x-2$ dât je pregledno Hornerovom shemom:

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 15 & -13 & 0 & 2 & -1 \\ \hline & 15 & 17 & 34 & 70 & 139 \end{array}$$

Dakle, ostatak dijeljenja je 139, dok je djelimični količnik $15x^3+17x^2+34x+70$.

27. Odgovor je potvrdan, pa je $P_5(x)=(x-2)(x-3)^2(x^2+1)$.

28. Koristeći Hornerovu shemu, dobijamo da je

$x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x+5=(x-1)^5+3(x-1)^4+5(x-1)^3+3(x-1)^2+5.$

29. Koristiti činjenice da je $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$; $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$; $1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}=\dfrac{x^{n+2}-1}{x-1}$, $(x\neq 1)$.

30. Kako je $x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)$, $\alpha=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, polinom $P(x)$ djeljiv je sa x^2+x+1 ako i samo ako je $(\alpha+1)^n-\alpha^n-1=0$ i $(\alpha^2+1)^n-\alpha^{2n}-1=0$. Kako je $\alpha+1=-\alpha^2$ i $\alpha^2+1=-\alpha$, ove jednakosti postaju $\alpha^{2n}-\alpha^n-1=0$ i $\alpha^n-\alpha^{2n}-1=0$, odakle poslije sabiranja proizilazi $-2=0$. Zaključujemo da je tvrđenje iskazano u zadatku tačno.

31. Uslov (1) kazuje da je polinom $P(x)+1$ djeljiv sa $(x-1)^3$. To znači da je izvod tog polinoma, tj. $P'(x)$, djeljiv sa $(x-1)^2$. Iz uslova (2) slijedi da je izvod polinoma $P(x)-1$, tj. $P'(x)$ djeljiv sa $(x+1)^2$. Kako je, po pretpostavci, $P(x)$ polinom petog stepena, može se pisati $P'(x)=A(x^2-1)^2$ (A je konstanta). Iz ove jednačine izlazi $P(x)=A\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+B$, gdje je B konstanta. Budući da je $P(1)=-1$, $P(-1)=1$, traženi polinom $P(x)$ ima oblik $P(x)=-\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x$.

32. Označimo date uslove $6|P(2)$ i $6|P(3)$ sa (1). Imamo:

(2) $P(x)-P(2)=(x-2)Q_1(x)$; $P(x)-P(3)=(x-3)Q_2(x)$.

$Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ su polinomi čiji je stepen $n-1$ ako je n stepen polinoma $P(x)$. Koeficijenti polinoma $Q_1(x)$ i $Q_2(x)$ su cijeli brojevi. Iz (2) za $x=5$ dobija se:

(3) $P(5)-P(2)=3Q_1(5)$; $P(5)-P(3)=2Q_2(5)$.

Na osnovu uslova (1) i relacija (3) zaključuje se

$\{3|P(5) \text{ i } 2|P(5)\}\Rightarrow 6|P(5)$.

33. a) Treba da je $(x^2+mx-1)(x-a)=x^3+px+q$, što je prema principu identiteta polinoma

$\Leftrightarrow a=q\wedge -am-1=p\wedge m-a-0\Leftrightarrow m=q\wedge p=-q^2-1\ (\wedge a=m)$;

b) treba da je $(x^2+mx+1)(x^2+ax+b)=x^4+px^2+q$

$\Leftrightarrow a+m=0\wedge 1+am+b=p\wedge a+bm=0\wedge b=q$

$\Leftrightarrow (m=0\wedge p=q+1)\vee(q=1\wedge p=2-m^2)\,(a=-m,\ b=q)$.

34. Očito je $P_n(r)=\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}=(1-1)^r=0$, $r=\overline{1,n}$, te je prema teoremi 4. $P_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{n!}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$.

35. a) $(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;

b) $(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$; c) $(x-2)^4-18(x-2)+38$;

d) $(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2-5(x+i)+7+5i$.

36. Razviti $P(x)$ po stepenima od $x-3$, a zatim zamijeniti $x-3$ sa $x+3$. Dobije se $P(x+3)=x^4+11x^3+45x^2+81x+55$.

37. Odrediti nule polinoma i najstariji koeficijent. Dobije se

a) $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)$; b) $2\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x+\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{2k-1}{2n}\pi\right)}{\sin\dfrac{2k-1}{2n}\pi}\right)$.

38. a) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$; b) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$;

c) $\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}-2(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}\right)\left(x^2+2x+1+\sqrt{2}+2(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+1)/2}\right)$,

d) $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2\cdot 2^{1/2n}x\cos\dfrac{8k+1}{4n}\pi+2^{1/n}\right)$; e) $(x^2-x\sqrt{a+2}+1)(x^2+x\sqrt{a+2}+1)$.

40. Ako je datâ pretpostavka tačna, tada je

$(x^2+ax+1)(x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+2)=x^6-15x^3-8x^2+2$,

odakle se na osnovu principa identiteta polinoma dobije sistem jednačina

(1) $a+A=0$,

(2) $1+aA+B=0$,

(3) $A+aB+C=-15$,

(4) $B+aC+2=-8$,

(5) $C+2a=0$.

Iz (1), (2) i (5) izlazi $(A, B, C)=(-a, a^2-1, -2a)$, te uvrštavanjem tih vrijednosti u jednačine (3) i (4) dobijamo:

$a^3-4a+15=0\wedge a^2=9$, tj. $a=-3$ (pošto $a=3$ ne zadovoljava prvu jednačinu).

41. Može se dokazati opštiji rezultat

(*) $\dfrac{1}{(x-a)^n(x-b)^n}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\dfrac{1}{(a-b)^{n+k}}\cdot\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n-k}}+(-1)^{n-k}\cdot\dfrac{1}{(x-b)^{n-k}}\right)$.

Rezultati (1), (2) i (3) se dobiju iz (*) za $n=1, 2, 3$ respektivno. Dokazati matematičkom inducKijom da (*) vrijedi za sve $n\in N$.

Matrice

Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi.
$m\times n$ matrica je kolekcija od $m\cdot n$ brojeva uređenih u pravougaoni niz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ m redova}$$

n kolona

Npr. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ je 2×3 matrica, $A=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 8 & 9 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{5\times 4}$

Brojeve u matrici zovemo elementi matrice i označavamo sa a_{ij}, gdje su i, j cijeli $1\le i\le m$ i $1\le j\le n$. Indeks i zovemo red indeks, a j kolona indeks.

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Npr. u matrici A

$a_{12}=\sqrt{2}$, $a_{23}=-5$, $a_{43}=2$, $a_{53}=-2$

$1\times n$ matricu zovemo n-dimenzionalni red vektor, $A=[a_1 \dots a_n]$
$m\times 1$ matricu je m-dimenzionalni kolona vektor $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Sabiranje matrica: $[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[s_{ij}]_{m\times n}$,
gdje je $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $\forall_{ij}$

npr.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Skalarno množenje matrice brojem:
c je realan broj $\quad c\cdot[a_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}]_{m\times n}$
gdje je $b_{ij}=c\cdot a_{ij}$ $\forall_{ij}$

npr.
$$2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$
Brojeve ćemo često zvati skalari.

Množenje matrica:
Prvo ćemo vidjeti šta je proizvod red vektora A i kolone vektora B.

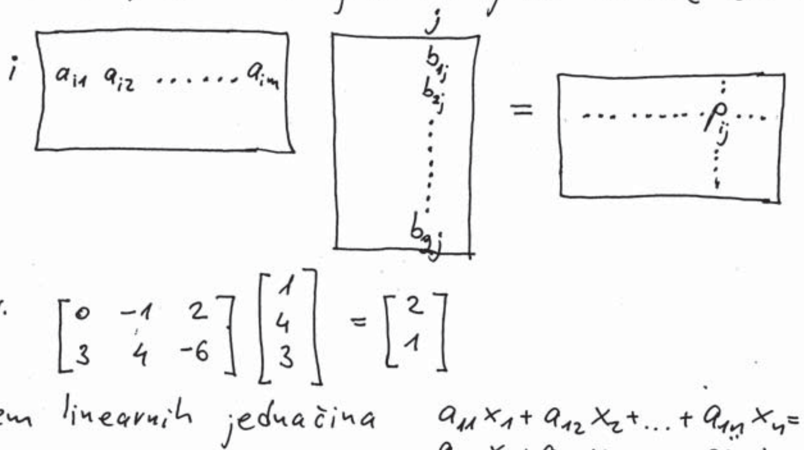
$$A\cdot B=[a_1\ a_2 \dots a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_m.$$

npr. $[3\ 1\ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}=3-1+8=10$

generalno:

$[a_{ij}]_{m\times q}\cdot[b_{ij}]_{q\times s}=[p_{ij}]_{m\times s}$ gdje je
$p_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj}$

ovo znači proizvod i-tog reda od A i j-te kolone od B.



npr. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ \vdots \qquad & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}$$

možemo pisati u matričnom obliku $A x=\mathbf{b}$, gdje A predstavlja koeficijent matricu $[a_{ij}]_{m\times n}$

$$\boxed{\quad A \quad}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

(1.) Ako je $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}$ izračunati:

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $2A-3B-I$ (I jedinična matrica)

Rj. a) $\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&11\\6&2&10\\6&3&17\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&-1\\0&2&2\\-4&-1&-3\end{bmatrix}$

c) $2\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8&10\\6&4&12\\2&2&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-3&18\\9&0&12\\15&6&30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&11&-8\\-3&3&0\\-13&-4&-17\end{bmatrix}$

(2.) Izračunati:

a) $\begin{bmatrix}2&3\\1&6\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\3&5\end{bmatrix}$ Rj. $=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot3&2\cdot1+3\cdot5\\1\cdot2+6\cdot3&1\cdot1+6\cdot5\\0\cdot2+1\cdot3&0\cdot1+1\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&17\\20&31\\3&5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1&4\\2&-5\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-2\\2&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+4\cdot2&1\cdot4+4\cdot5&1\cdot(-2)+4\cdot6\\2\cdot1+(-5)\cdot2&2\cdot4+(-5)\cdot5&2\cdot(-2)+(-5)6\\3\cdot1+6\cdot2&3\cdot4+6\cdot5&3\cdot(-2)+6\cdot6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&24&22\\-8&-17&-34\\15&42&30\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=a+2b+3c$

(3.) Ako je $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}$ izračunati $3A^2-2A^T+5\cdot I$.

(A^T transponovana matrica matrice A) (kada elementi iz reda zamjene položaj sa elementima iz kolona)

Rj. $A^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-4&-5\\3&1&2\end{bmatrix}$. $A^2=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{bmatrix}$

$3A^2-2A^T+5=\begin{bmatrix}18&-27&21\\-9&21&12\\-3&12&24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&6\\-4&-8&-10\\6&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&-31&15\\-5&34&22\\-9&10&25\end{bmatrix}$

(4.) Ako je $A=\begin{bmatrix}2&3&5\\-3&1&5\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2&-3\\-1&0\\1&1\end{bmatrix}$, izračunati $2\cdot A^T\cdot A-3\cdot B\cdot B^T+6I$.

Rj. $\begin{bmatrix}-7&0&5\\0&23&43\\5&43&100\end{bmatrix}$

8 Matrice. Operacije sa matricama.

Zadatak 8.1 *Date su matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Izračunati matrice $A+B, A-B, A \cdot B$.

Rješenje: Matrice A i B su formata 3×3 pa su moguće tražene operacije nad njima.

$$\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 6 & 2 & 10 \\ 6 & 3 & 17 \end{bmatrix} \\
A-B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\
A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 8 & 78 \\ 39 & 9 & 86 \\ 39 & 13 & 80 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.2 *Data je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunati $P(A) = 3A^2 - 5A - 2E$, gdje je E jedinična matrica.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 3A^2 - 5A - 2E = \\
&= 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= 3 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 21 & 12 \\ 18 & 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.3 *Dat je polinom $P(x) = 2x - x^{-2} - 3$ i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Izračunati $P(A)$.

Rješenje:

Jasno je da vrijedi $P(A) = 2A - A^{-2} - 3E$, gdje je E jedinična matrica. Prvo ćemo izračunati inverznu matricu matrice A po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj A.$$

Imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \left| \begin{array}{ccc|cc} 4 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right. = -8.$$

Kofaktori matrice A su:

$$\begin{array}{lll}
A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 & A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 & A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4
\end{array}$$

pa je adjungovana matrica matrice A

$$adj A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{aligned}
A^{-2} &= A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Konačno, imamo da je

$$\begin{aligned}
P(A) &= 2A - A^{-2} - 3E = \\
&= 2\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 8 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{79}{16} & -\frac{35}{16} & -\frac{131}{32} \\ 0 & -6 & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.4 *Dat je polinom* $P(x) = -2 + 3x + x^{-2}$ *i matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Izračunati $P(A)$.

Rješenje:
Jasno je da vrijedi $P(A) = -2E+3A+A^{-2}$, gdje je E jedinična matrica. Prvo ćemo izračunati inverznu matricu matrice A po formuli

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adj A.$$

Imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -6.$$

Kofaktori matrice A su:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 & A_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}$$

pa je adjungovana matrica matrice A

$$adj A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{aligned}
A^{-2} &= A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Konačno, imamo da je

$$\begin{aligned}
P(A) &= -2E + 3A + A^{-2} = \\
&= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{9}{4} & -\frac{25}{4} \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{109}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{98}{9} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.5 *Dokazati da za matricu*

$$A(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

vrijedi $A(t) \cdot A(r) = A(t+r), t, r \in \mathbb{R}$.

Rješenje:

Kako je

$$A\left(t\right)=\left[\begin{array}{cc}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{array}\right]\quad i\quad A\left(x\right)=\left[\begin{array}{cc}\cos r & -\sin r\\ \sin r & \cos r\end{array}\right]$$

tada je

$$\begin{aligned}A(t)\cdot A(r) &= \left[\begin{array}{cc}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc}\cos r & -\sin r\\ \sin r & \cos r\end{array}\right]=\\ &= \left[\begin{array}{cc}\cos t\cdot\cos r-\sin t\cdot\sin r & -\cos t\cdot\sin r-\sin t\cdot\cos r\\ \sin t\cdot\cos r+\cos t\cdot\sin r & -\sin t\cdot\sin r+\cos t\cdot\cos r\end{array}\right]=\\ &= \left[\begin{array}{cc}\cos t\cdot\cos r-\sin t\cdot\sin r & -\left(\cos t\cdot\sin r+\sin t\cdot\cos r\right)\\ \sin t\cdot\cos r+\cos t\cdot\sin r & \cos t\cdot\cos r-\sin t\cdot\sin r\end{array}\right]=\\ &= \left[\begin{array}{cc}\cos\left(t+r\right) & -\sin\left(t+r\right)\\ \sin\left(t+r\right) & \cos\left(t+r\right)\end{array}\right]=A(t+r).\end{aligned}$$

Zadatak 8.6 *Date su matrice*

$$A=\left[\begin{array}{rrr}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right]\quad i\quad B=\left[\begin{array}{rrr}0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{array}\right].$$

Izračunati matrice $P=AB^{-1}+A^{-2}+2E$ *i* $Q=2A-3B^{-1}+A^{-1}B$, *gdje je* E *jedinična matrica.*

Rješenje:

Izračunajmo inverznu matricu matrice A po formuli

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot adjA.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\det A &= \left|\begin{array}{rrr}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrr}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right|\begin{array}{rr}2 & 0\\ 4 & 3\\ 1 & 1\end{array}=\\ &= (6+0-4)-(-3+4+0)=2-1=1.\end{aligned}$$

Kofaktori matrice A su

$$\begin{array}{lll}A_{11}=\left|\begin{array}{rr}3 & 2\\ 1 & 1\end{array}\right|=1 & A_{12}=-\left|\begin{array}{rr}4 & 2\\ 1 & 1\end{array}\right|=-2 & A_{13}=\left|\begin{array}{rr}4 & 3\\ 1 & 1\end{array}\right|=1\\ A_{21}=-\left|\begin{array}{rr}0 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right|=-1 & A_{22}=\left|\begin{array}{rr}2 & -1\\ 1 & 1\end{array}\right|=3 & A_{23}=-\left|\begin{array}{rr}2 & 0\\ 1 & 1\end{array}\right|=-2\\ A_{31}=\left|\begin{array}{rr}0 & -1\\ 3 & 2\end{array}\right|=3 & A_{32}=-\left|\begin{array}{rr}2 & -1\\ 4 & 2\end{array}\right|=-8 & A_{33}=\left|\begin{array}{rr}2 & 0\\ 4 & 3\end{array}\right|=6\end{array}$$

pa je adjungovana matrica

$$adjA=\left[\begin{array}{rrr}1 & -1 & 3\\ -2 & 3 & -8\\ 1 & -2 & 6\end{array}\right]$$

Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\left[\begin{array}{rrr}1 & -1 & 3\\ -2 & 3 & -8\\ 1 & -2 & 6\end{array}\right]=\left[\begin{array}{rrr}1 & -1 & 3\\ -2 & 3 & -8\\ 1 & -2 & 6\end{array}\right].$$

Izračunajmo inverznu matricu matrice B po formuli

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot adjB.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\det B &= \left|\begin{array}{rrr}0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{rrr}0 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{array}\right|\begin{array}{rr}0 & 1\\ 4 & 2\\ 1 & 0\end{array}=\\ &= (0+3+0)-(2+0-4)=3+2=5.\end{aligned}$$

Kofaktori matrice B su

$$\begin{array}{lll}B_{11}=\left|\begin{array}{rr}2 & 3\\ 0 & -1\end{array}\right|=-2 & B_{12}=-\left|\begin{array}{rr}4 & 3\\ 1 & -1\end{array}\right|=7 & B_{13}=\left|\begin{array}{rr}4 & 2\\ 1 & 0\end{array}\right|=-2\\ B_{21}=-\left|\begin{array}{rr}1 & 1\\ 0 & -1\end{array}\right|=1 & B_{22}=\left|\begin{array}{rr}0 & 1\\ 1 & -1\end{array}\right|=-1 & B_{23}=-\left|\begin{array}{rr}0 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right|=1\\ B_{31}=\left|\begin{array}{rr}1 & 1\\ 2 & 3\end{array}\right|=1 & B_{32}=-\left|\begin{array}{rr}0 & 1\\ 4 & 3\end{array}\right|=4 & B_{33}=\left|\begin{array}{rr}0 & 1\\ 4 & 2\end{array}\right|=-4\end{array}$$

pa je adjungovana matrica

$$adjB=\left[\begin{array}{rrr}-2 & 1 & 1\\ 7 & -1 & 4\\ -2 & 1 & -4\end{array}\right]$$

Inverzna matrica matrice B je

$$B^{-1}=\frac{1}{5}\left[\begin{array}{rrr}-2 & 1 & 1\\ 7 & -1 & 4\\ -2 & 1 & -4\end{array}\right]=\left[\begin{array}{rrr}-\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5}\end{array}\right].$$

Izračunajmo matricu A^{-2}

$$\begin{aligned}
A^{-2} &= A^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -10 & 29 \\ -16 & 27 & -78 \\ 11 & -19 & 55 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
P &= AB^{-1} + A^{-2} + 2E = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -10 & 29 \\ -16 & 27 & -78 \\ 11 & -19 & 55 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{38}{5} & -\frac{49}{5} & \frac{151}{5} \\ -\frac{71}{5} & \frac{148}{5} & -\frac{382}{5} \\ \frac{58}{5} & -\frac{94}{5} & \frac{286}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
Q &= 2A - 3B^{-1} + A^{-1}B = \\
&= 2\cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 3\cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{21}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{12}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 4 & 4 & 15 \\ -2 & -3 & -11 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \frac{21}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{38}{5} \\ \frac{39}{5} & \frac{53}{5} & \frac{83}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{33}{5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Zadatak 8.7 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$X(A+E) = 2A - E$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Rješenje:
Neka je

$$\begin{aligned}
P &= A + E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
Q &= 2A - E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik

$$XP = Q$$

koja se rješava na sljedeći način

$$\begin{aligned}
XP &= Q \quad / \cdot P^{-1} \\
XPP^{-1} &= QP^{-1} \\
XE &= QP^{-1}
\end{aligned}$$

pa je rješenje matrica $X = QP^{-1}$.
Izračunajmo matricu P^{-1} po formuli

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot adjP$$

Determinanta matrice P je

$$\det P = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

a kofaktori matrice P su

$$\begin{array}{lll}
P_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 & P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 & P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
P_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 & P_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 & P_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
P_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 & P_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 & P_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6
\end{array}$$

pa je

$$adjP = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$P^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned} X &= QP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 8.8 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$X\left(2A - 3E\right) = 2E - A$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Neka je

$$\begin{aligned} P &= 2A - 3E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\ Q &= 2E - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik

$$XP = Q$$

koja se rješava na sljedeći način

$$\begin{aligned} XP &= Q \quad / \cdot P^{-1} \\ XPP^{-1} &= QP^{-1} \\ XE &= QP^{-1} \end{aligned}$$

pa je rješenje matrica $X = QP^{-1}$.

Izračunajmo matricu P^{-1} po formuli

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot adjP$$

Determinanta matrice P je

$$\det P = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 9$$

a kofaktori matrice P su

$$\begin{array}{lll} P_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -9 & P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0 & P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ P_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = -18 & P_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 9 & P_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ P_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & P_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & P_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = - \end{array}$$

pa je

$$adjP = \begin{bmatrix} -9 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -9 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned} X &= QP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 8.9 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$(A-2B)\,X = 2A - B + E$$

ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

i E jedinična matrica.

Rješenje:
Neka je

$$\begin{aligned} P &= A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - 2\cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \\ Q &= 2A - B + E = 2\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sada matrična jednačina ima oblik

$$PX = Q$$

koja se rješava na sljedeći način

$$\begin{aligned} P^{-1}\cdot /\quad PX &= Q \quad /\cdot P^{-1} \\ PP^{-1}X &= P^{-1}Q \\ EX &= P^{-1}Q \end{aligned}$$

pa je rješenje matrica $X = P^{-1}Q$.
Izračunajmo matricu P^{-1} po formuli

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\cdot adjP$$

Determinanta matrice P je

$$\det P = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -54$$

a kofaktori matrice P su

$$\begin{aligned} &P_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 18 \quad P_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0 \quad P_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &P_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 9 \quad P_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 27 \quad P_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &P_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \quad P_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad P_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 \end{aligned}$$

pa je

$$adjP = \begin{bmatrix} 18 & 9 & -9 \\ 0 & 27 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$P^{-1} = \frac{1}{-54}\begin{bmatrix} 18 & 9 & -9 \\ 0 & 27 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične jednačine je matrica

$$\begin{aligned} X &= P^{-1}Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{51}{54} \\ 0 & 0 & \frac{8}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 8.10 *Riješiti matričnu jednačinu*

$$AX^{-1} = A - X^{-1}$$

ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:
Matrična jednačina

$$AX^{-1} = A - X^{-1}$$

je ekvivalentna jednačini
$$AX = A + E$$
jer
$$\begin{aligned} AX^{-1} &= A - X^{-1} \\ AX^{-1} + X^{-1} &= A \\ (A+E)\,X^{-1} &= A \quad / \cdot X \\ (A+E)\,X^{-1}X &= AX \\ A + E &= AX. \end{aligned}$$
Neka je
$$B = A + E = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Sada matriča jednačina ima oblik
$$AX = B$$
koja se rješava na sljedeći način
$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot /\ AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$
Inverzna matrica matrice A je matrica
$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
pa je rješenje matrične jednačine matrica
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 8.11 *Matricu*
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
predstaviti kao zbir jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

Rješenje:

Kvadratna matrica je simetrična ako su joj elementi simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ i vrijedi
$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right).$$
Kvadratna matrica je antisimetrična ako je jednaka svojoj negativnoj transponovanoj matrici i vrijedi
$$A_K = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$
Kako je
$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$
onda je
$$\begin{aligned} A_S &= \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ A_k &= \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 8.12 *Odrediti rang matrice*
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:
$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \textit{ prepisana} \\ 2 \cdot V_1 + V_2 \\ 4 \cdot V_1 - V_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} V_1 \textit{ prepisana} \\ V_2 \textit{ prepisana} \\ 7 \cdot V_2 - 3 \cdot V_3 \end{array} \end{aligned}$$

Dakle, $rang A = 3$.

Zadatak 8.13 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ 2 \cdot V_1 + V_2 \\ 3 \cdot V_1 + V_3 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_2 - V_3 \end{array} \end{aligned}$$

Dakle, $rang A = 2$.

Zadatak 8.14 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_1 - V_2 \\ V_1 + V_3 \\ 2 \cdot V_1 - V_4 \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_1 + V_3 \\ V_4 \ prepisana \end{array} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_3 \ prepisana \\ V_3 - V_4 \end{array} \end{aligned}$$

Dakle, $rang A = 4$.

Zadatak 8.15 *Odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_1 + V_2 \\ 2V_1 - V_3 \\ 3V_1 - V_4 \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_2 + 4V_3 \\ V_3 - V_4 \end{array}
\end{aligned}
$$

Dakle, $rang A = 3$.

Zadatak 8.16 *Odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.
$$

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ 2V_1 - V_2 \\ 2V_1 + V_3 \\ 3V_1 - V_4 \end{array} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 22 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ 5V_2 - V_3 \\ V_2 - V_3 \end{array}
\end{aligned}
$$

Dakle, $rang A = 3$.

Zadatak 8.17 *U zavisnosti od realnog parametra λ odrediti rang matrice*

$$
A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.
$$

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 - V_1 \\ V_3 - \lambda V_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_3 + V_2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) \end{bmatrix}$$

Diskusija:

1. ako je $\lambda = 1$ tada je $rangA = 1$ jer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. ako je $\lambda = -2$ tada je $rangA = 2$ jer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ako je $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$ tada je $rangA = 3$.

Zadatak 8.18 *U zavisnosti od realnog parametra λ odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 - 4V_1 \\ V_3 - 7V_1 \\ V_4 - 2V_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_3 - 3V_2 \\ V_4 - 5V_2 \end{array}$$

Diskusija:

1. ako je $\lambda = 0$ tada je $rangA = 2$.
2. ako je $\lambda \neq 0$ tada je $rangA = 3$.

Determinante

matrica tipa $n\times n$

Determinanta je broj pridružen svakoj kvadratnoj matrici. Determinantu matrice A obilježavamo sa $\det A$ ili $|A|$.
Preciznija definicija determinante je:
Determinanta je f-ja koja $n\times n$ realnih brojeva preslikava u realan broj.

Osobine determinante: (neke osobine determinanti)

1. Determinanta jedinične matrice je 1 ($\det I = 1$).
2. Ako dva reda (ili dvije kolone) međusobno zamjene mjesta znak determinante se mijenja.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3. a) Determinanta se množi jednim brojem ako se tim brojem pomnože svi elementi jednog reda (ili jedne kolone)

$$t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

(linearnost za svaki red)

1. Izračunati: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{Rj.}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 = 2$$

razvoj determinante po trećem redu

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{razvoj determinante po prvom redu}} 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 0 - 2\cdot(-3) + 0 = 6$$

Mogli smo izračunati i na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{II_k - III_k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-3) = 6$$

2. Izračunati:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{III_k - IV_k} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{I_R - IV_R} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 2 = -8$$

3. Izračunati:

a) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{Rj.}{\xlongequal{I_R - II_R}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{III_R + I_R} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot 5 = 25$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{I_R - III_R} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{II_R + I_R} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\cdot 15 = -30$$

4. Izračunati:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{Rj.}{\xlongequal[\substack{III_R - I_R\cdot 3 \\ IV_R - I_R\cdot 4}]{II_R - I_R\cdot 2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot(-1) = -5$$

b)^{v} $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

c)^{v} $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rješenja: b) 0 c) -1

5.^{v} Izračunati: $$\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{3} & \sqrt{8} & 7\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+2\sqrt{3} & 4\sqrt{2} & \sqrt{3}+2\sqrt{5} \end{vmatrix}.$$

Rj. $36\sqrt{2}$

6. Dokazati da je $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2(1+a) \\ 1 & a & a(a^2+1) \\ 1 & a^2 & a(1+a) \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a(a+1) \\ 1 & a & a^2+1 \\ 1 & a^2 & a+1 \end{vmatrix} \underset{III_R - I_R}{\overset{II_R - I_R}{=\!=}}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a-1 & 1-a \\ (a+1)(a-1) & 1-a^2 \end{vmatrix} = a^2(a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ a+1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a-1)(1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a-1)(1-a)(a+1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

što je i trebalo dobiti.

7. Izračunati: $\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}$

Rj. $\underset{}{\overset{IV_k + (I_k + II_k + III_k)}{=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & a & 2a+2b \\ b & a & a & 2a+2b \\ a & b & b & 2a+2b \\ b & a & b & 2a+2b \end{vmatrix}$

$$= (2a+2b) \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & a & 1 \\ a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \end{vmatrix} \underset{IV_R - III_R}{\overset{II_R - I_R}{=\!=}} (2a+2b) \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ a & b & b & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{III_R - I_R}{=\!=} (2a+2b) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2a+2b) \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = -a(2a+2b) \begin{vmatrix} b-a & a-b \\ b-a & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -a(2a+2b)(b-a)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Rastaviti na faktore polinom:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$.

Riješiti jednačinu $\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 3x-8 & 3x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} \overset{III_V - II_V}{=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ x-4 & x-4 & x-4 \end{vmatrix} = (-1)(x-4) \begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{II_k - III_k}{\overset{I_k - III_k}{=\!=}}$$

$$= (-1)(x-4) \begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 & x+1 \\ x-3 & x+3 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(x-4) \begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} \overset{I_V - II_V}{=\!=}$$

$$= (-1)(x-4) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3)(x+2)$$

$(-1)(x-4)(x-3)(x+2) = 0$ Rješenja jednačine su $x=4$ ili $x=3$ ili $x=-2$.

Riješiti jednačinu: $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} \overset{I_k + II_k + III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 3x-2 & x+2 & x-1 \\ 3x-2 & x-4 & x \\ 3x-2 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = (3x-2) \begin{vmatrix} 1 & x+2 & x-1 \\ 1 & x-4 & x \\ 1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{III_R - II_R}{\overset{I_R - II_R}{=\!=}} (3x-2) \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 1 & x-4 & x \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = -(3x-2) \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -(3x-2)(-30+8) =$$

$= 22(3x-2)$ $22(3x-2) = 0$ $3x-2 = 0$ $3x = 2$ $x = \frac{2}{3}$ je rješenje jednačine

Izračunati

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Rj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{I_k + III_k \\ II_k + III_k}}{\underset{III_k + IV_k \cdot 2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ -2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \overset{I_k + III_k}{\underset{II_k + III_k}{=\!=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & a+10 & 7 \\ -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15\,(11-a-10)$$

$$= -15\,(-a+1) = 15a - 15$$

Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$$

(determinanta ima n vrsta i n kolona).

Rj. BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + 2x^2 + x^4 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$$

Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima k vrsta i k kolona

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2k}$$

gde k uzima brojeve od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima $n+1$ vrstu i $n+1$ kolonu tačnije dokažimo da

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + x^{2n+2}.$$

Polazimo od determinante koja ima $(n+1)$-vrstu i $(n+1)$-kolonu:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{razvoj} \\ \text{po prvoj}}}{\underset{\text{koloni}}{=\!=\!=}} (1+x^2) \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{(ova determinanta} \\ \text{ima } n \text{ vrsta i } n \text{ kolona)}}} - x \underbrace{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{(ovu determinantu mogu razviti} \\ \text{po prvoj vrsti i ostaće mi} \\ \text{determinanta iz pretpostavke} \\ \text{koja ima } n-1 \text{ vrstu i } n-1 \text{ kolonu)}}} =$$

$$\overset{\substack{\text{na} \\ \text{osnovu}}}{\underset{}{\underset{\text{pretpostavke}}{=\!=\!=}}} (1+x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2})$$

$$= (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) + (x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}) -$$

$$-(x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n-2}+x^{2n}) = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n+2}$$

što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

(#) Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot n!$$

Rj. BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2 = (-1)^{2-1} \cdot 2!$$ Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & \dots & k & k \\ k & 2 & k & \dots & k & k \\ k & k & 3 & \dots & k & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \dots & k-1 & k \\ k & k & k & \dots & k & k \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot k!$$

tačna za sve brojeve od 1 do n $(k=1,2,\dots,n)$.

Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za broj $n+1$ tj. dokažimo

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot (n+1)!$$

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} \overset{I_k-(N+1)_k}{=\!=} \begin{vmatrix} -n & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ 0 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ 0 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-n) \begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-n)(n+1) \begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ n+1 & n+1 & \dots & n & 1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{I_k-N_k \\ II_k-N_k \\ \vdots \\ (N-1)_k-N_k}}{=\!=}$$

$$= (-1) \cdot n(n+1) \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & 1 \\ n & 2 & \dots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ n & n & \dots & n-1 & 1 \\ n & n & \dots & n & 1 \end{vmatrix} = (-1)(n+1) \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & n \\ n & 2 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} \overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=\!=} (-1)(n+1)(-1)^{n-1} \cdot n!$$

$$= (-1)^n (n+1)!$$

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

7 Determinante

Determinante drugog reda računamo po formuli

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Zadatak 7.1 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1.$$

Zadatak 7.2 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = -8 + 3 = -5.$$

Determinante trećeg reda računamo na dva načina: Sarusovim pravilom ili LaPlasovim razvojem determinante po odabranoj vrsti ili koloni (prilikom LaPlasovog razvoja determinante veoma je povoljno odabrati vrstu ili kolonu koja ima nule i po njoj izvršiti razvoj).

Zadatak 7.3 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:
Prvi način - Sarusovo pravilo

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{matrix} = \\ &= (1 + 8 + 72) - (6 - 12 - 8) = 95. \end{aligned}$$

Drugi način - LaPlasov razvoj (npr. po prvoj vrsti)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 1\,(1 + 12) + 2\,(4 + 4) + 3\,(24 - 2) = \\ &= 13 + 16 + 66 = 95. \end{aligned}$$

Determinante četvrtog i većeg reda računamo LaPlasovim razvojem determinante po odabranoj vrsti ili koloni, i time red determinante smanjujemo za jedan.

Zadatak 7.4 *Izračunati*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:
Izvršimo LaPlasov razvoj ove determinante po prvoj vrsti

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \\ &\quad +3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (-18) - 2 \cdot (-26) + 3 \cdot 15 - 0 = 25 \end{aligned}$$

Zadatak 7.5 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

Koristeći osobine determinanti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & a & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b & a-b & b \\ b-a & a & a-b & b \\ a-b & b & 0 & a \\ b-a & a & b-a & a \end{vmatrix} \quad \textit{Od prve kolone oduzeli drugu. Od treće kolone oduzeli četvrtu. Drugu i četvrtu kolonu prepisali.}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b & a-b & b \\ -(a-b) & a & a-b & b \\ a-b & b & 0 & a \\ -(a-b) & a & -(a-b) & a \end{vmatrix} \quad \textit{Iz prve i treće kolone izvlačimo zajednički faktor } (a-b).$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & b & 1 & b \\ -1 & a & 1 & b \\ 1 & b & 0 & a \\ -1 & a & -1 & a \end{vmatrix} \quad \textit{Od druge kolone oduzmimo četvrtu.}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & a-b & 1 & b \\ 1 & -(a-b) & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \quad \textit{Iz druge kolone izvlačim faktor } (a-b).$$

$$= (a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \quad \textit{Razvoj po drugoj koloni}$$

$$= (a-b)^3 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & a \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ -1 & 1 & b \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a-b)^3 (-a-b+a-a+a+b-b+b+a+b) =$$

$$= (a-b)^3 (a+b).$$

Zadatak 7.6 *Izračunati determinantu*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Rješenje:

Koristeći osobine determinanti, dobijamo

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \textit{Od druge vrste oduzmimo prvu. Od treće vrste oduzmimo prvu}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \textit{Razvoj po prvoj koloni}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \quad \textit{Izvlačimo faktore } (b-a) \textit{ i } (b-a)$$

$$= (b-a)(b-c)(c-a).$$

Zadatak 7.7 *Dokazati*

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = 4(a-b)(b-c)(a-c).$$

Rješenje:

Množenjem elemenata prve kolone sa -1 i dodavanjem drugoj i trećoj koloni, dobijamo

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & a+1 \\ b^2 & 2b+1 & b+1 \\ c^2 & 2c+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a & a+1 \\ b^2 & b & b+1 \\ c^2 & c & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\cdot\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ (b-a)\,(b+a) & b-a & 0 \\ (b-c)\,(b+c) & c-a & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(b-a)\,(b-c)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b+a & 1 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(b-a)\,(b-c)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 4\,(a-b)\,(b-c)\,(a-c)\,.
\end{aligned}
$$

Rang matrice

Minor reda k matrice A je determinanta reda k sastavljena od elemenata koji stoje na presjecima proizvoljnih k vrsta i k kolona matrice A.

Npr.
$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

minor reda 3
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

minor reda 4
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Rang matrice A je broj (**označavamo ga sa rang(A)**) koji je jednak redu maksimalnog minora, različitog od nule, determinante $\det A$.

Za dvije matrice A i B kažemo da su ekvivalentne ako imaju isti rang. Rang matrice tražimo elementarnim transformacijama:

1. razmjena mjesta dvije vrste (red) ili dvije kolone
2. dodavanjem elemenata jednog reda (ili jedne kolone) odgovarajućim elementima drugog reda (ili druge kolone) pomnožena nekim brojem.
3. množenje elemenata jednog reda (ili jedne kolone) nekim brojem različitim od nule

Ekvivalentne matrice označavamo sa $A \sim B$.

1. Odrediti rang matrice:

a) $M=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

Rj.
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{III}_R-\mathrm{I}_R}{\overset{\mathrm{II}_R-\mathrm{I}_R\cdot 2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{III}_R-\mathrm{II}_R}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rang}(M)=3$$

b) $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Rj.
$$\overset{\mathrm{I}_k\leftrightarrow \mathrm{II}_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{III}_R-\mathrm{I}_R \\ \mathrm{IV}_R-\mathrm{I}_R\cdot 2}}{\overset{\mathrm{II}_R+\mathrm{I}_R}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{II}_k\leftrightarrow \mathrm{III}_k}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{IV}_R-\mathrm{I}_R}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{IV}_R-\mathrm{III}_R\cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rang}(A)=2$$

2. Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$.

Rj.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{III}_k\leftrightarrow \mathrm{I}_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{II}_v+\mathrm{I}_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{III}_v-\mathrm{II}_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

ako je $\lambda=0$ tada je $\mathrm{rang}(A)=2$
ako je $\lambda\neq 0$ tada je $\mathrm{rang}(A)=3$

3. U ovisnosti o parametru $\lambda \in R$ odredite rang matrice
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rj.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix} \underset{\mathrm{III}_R-\mathrm{I}_R}{\overset{\mathrm{II}_R-\mathrm{I}_R}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{III}_R:(\lambda-1) \\ \lambda\neq 1 \\ \text{zapamtimo}}}{\overset{\mathrm{II}_R:(\lambda-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{III}_R+\mathrm{II}_R\cdot(-\lambda-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \underbrace{-(\lambda+1)^2+1}_{-(\lambda^2+2\lambda+1)+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

Matrica se ne može više pojednostaviti. Diskusija:

Za $\lambda=0$ dobićemo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rang}\, A=2$

Za $\lambda=-2$ imamo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rang}\, A=2$.

Ostaje nam još slučaj $\lambda=1$. Zašto?

Za $\lambda=1$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rang}\, A=1$. Zašto?

U ostalim slučajevima (tj. kad je $\lambda\neq 0$, $\lambda\neq -2$ i $\lambda\neq 1$) $\mathrm{rang}\, A=3$.

4.ᵛ Diskutovati rang matrice $M=\begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 2 & -1 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5.ᵛ Diskutovati o rangu matrice
$$M=\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$$
u zavisnosti od parametara a i b.

Diskutovati rang matrice u zavisnosti od parametara a i b.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&9&6&2\\5&4&12&8&5\\1&2&6&4&1\\4&1&3&2&a\\3&b&6&4&3\\7&5&15&10&7\end{bmatrix}$$

Rj.

$$A=\begin{bmatrix}2&3&9&6&2\\5&4&12&8&5\\1&2&6&4&1\\4&1&3&2&a\\3&b&6&4&3\\7&5&15&10&7\end{bmatrix}\overset{II_k\leftrightarrow IV_k}{\sim}\begin{bmatrix}2&6&9&3&2\\5&8&12&4&5\\1&4&6&2&1\\4&2&3&1&a\\3&4&6&b&3\\7&10&15&5&7\end{bmatrix}\overset{IV_R\leftrightarrow VI_R}{\sim}\begin{bmatrix}2&6&9&3&2\\5&8&12&4&5\\1&4&6&2&1\\7&10&15&5&7\\3&4&6&b&3\\4&2&3&1&a\end{bmatrix}\overset{III_R\leftrightarrow I_R}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&4&6&2&1\\5&8&12&4&5\\2&6&9&3&2\\7&10&15&5&7\\3&4&6&b&3\\4&2&3&1&a\end{bmatrix}\begin{matrix}II_R-I_R\cdot5\\III_R-I_R\cdot2\\\sim\\IV_R-I_R\cdot7\\V_R-I_R\cdot3\\VI_R-I_R\cdot4\end{matrix}\begin{bmatrix}1&4&6&2&1\\0&-12&-18&-6&0\\0&-2&-3&-1&0\\0&-18&-27&-9&0\\0&-8&-12&b-6&0\\0&-14&-21&-7&a-4\end{bmatrix}\overset{II_k\leftrightarrow V_k}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&6&2&4\\0&0&-18&-6&-12\\0&0&-3&-1&-2\\0&0&-27&-9&-18\\0&0&-12&b-6&-8\\0&a-4&-21&-7&-14\end{bmatrix}\sim$$

$$\overset{II_R\leftrightarrow III_R}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&6&2&4\\0&0&-3&-1&-2\\0&0&-18&-6&-12\\0&0&-27&-9&-18\\0&0&-12&b-6&-8\\0&a-4&-21&-7&-14\end{bmatrix}\begin{matrix}III_R-II_R\cdot6\\\sim\\IV_R-II_R\cdot9\\V_R-II_R\cdot4\\VI_R-II_R\cdot7\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&6&2&4\\0&0&-3&-1&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&b-2&0\\0&a-4&0&0&0\end{bmatrix}$$

Diskusija

1° $a=4$, $b=2$ $\quad\operatorname{rang}A=2$

2° $a=4$, $b\neq2$ $\quad\operatorname{rang}A=3$

3° $a\neq4$, $b=2$ $\quad\operatorname{rang}A=3$

4° $a\neq4$, $b\neq2$. $\quad\operatorname{rang}A=4$

Diskutovati rang matrice

$$M=\begin{bmatrix}14&4&2\lambda-4&-6\\6&2&-1&-3\\3\lambda+4&2&-2\lambda+1&-3\\24&8&-4&-12\end{bmatrix}$$

za razne vrijednosti parametra λ.

Rj.

$$M=\begin{bmatrix}14&4&2\lambda-4&-6\\6&2&-1&-3\\3\lambda+4&2&-2\lambda+1&-3\\24&8&-4&-12\end{bmatrix}\overset{III_v+I_v}{\sim}\begin{bmatrix}14&4&2\lambda-4&-6\\6&2&-1&-3\\3\lambda+18&6&-3&-9\\24&8&-4&-12\end{bmatrix}\begin{matrix}IV_v:4\\\sim\\I_v:2\\III_v:3\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}7&2&\lambda-2&-3\\6&2&-1&-3\\\lambda+6&2&-1&-3\\6&2&-1&-3\end{bmatrix}\overset{IV_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}7&2&\lambda-2&-3\\6&2&-1&-3\\\lambda+6&2&-1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}6&2&-1&-3\\7&2&\lambda-2&-3\\\lambda+6&2&-1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_k\leftrightarrow IV_k}{\sim}\begin{bmatrix}-3&2&-1&6\\-3&2&\lambda-2&7\\-3&2&-1&\lambda+6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}II_v-I_v\\\sim\\III_v-I_v\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}-3&2&-1&6\\0&0&\lambda-1&1\\0&0&0&\lambda\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Za $\lambda=0$ $\quad\operatorname{rang}(M)=2$

Za $\lambda\neq0$ $\quad\operatorname{rang}(M)=3$

(#) Diskutovati rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & t & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ za razne vrijednosti parametra t.

Rj.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & t & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \overset{III_k \leftrightarrow V_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & t \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & t \end{bmatrix} \underset{IV_v - I_v}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & t \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & t \end{bmatrix}$$

$$\overset{IV_v + II_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 11 & t \end{bmatrix} \overset{IV_v - III_v \cdot \frac{3}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & t \end{bmatrix}$$

$$-9 + 6 \cdot \frac{3}{2} = -9 + 9 = 0$$
$$11 - 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{22}{2} - \frac{21}{2} = \frac{1}{2}$$

Bez obzira na vrijednost parametra t rang matrice M je uvijek 4.

Inverzna matrica

Transponovanu matricu matrice A obilježavamo sa A^T.
Kofaktor A_{ij}, matrice A, elementa a_{ij} je determinanta pomnožena sa $(-1)^{i+j}$ čiji su elementi svi elementi iz matrice A osim one kolone i one vrste u kojoj se nalazi koeficijent a_{ij}.

Npr.

$$A=\begin{bmatrix}3&7&2\\6&8&9\\1&2&4\end{bmatrix},\quad \underbrace{A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&7\\1&2\end{vmatrix}}_{\text{kofaktor elementa } a_{23}},\quad \overbrace{A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}}^{\text{kofaktor elementa } a_{12}},\quad \underbrace{A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}7&2\\8&9\end{vmatrix}}_{\text{kofaktor elementa } a_{31}}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}3&6&1\\7&8&2\\2&9&4\end{bmatrix}$$

Kofaktor matrica (A_{kof}) kvadratne matrice A je matrica kofaktora A_{ik} elemenata a_{ik} dane matrice.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\qquad A_{kof}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}$$

Za matricu A kažemo da je regularna ako je $\det A\neq 0$.
Inverznu matricu računamo po formuli

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^T$$

Neke osobine inverzne matrice:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

(1.) Nađi inverznu matricu matrice $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$.

Rj. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^T$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}\overset{III_R-II_R}{=\!=}\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$ $\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=2$ $\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}=-2$

$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=2$

$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-1&-1\\-2&2&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&-1&2\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

inverzna matrica matrice A

provjera:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2&-2\\-1&-1&2\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2.) Nađi inverznu matricu matrice $B=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&3&4\\1&1&2\end{bmatrix}$.

Rj. $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}B_{kof}^T$, $\quad\det B=\begin{vmatrix}3&2&4\\2&3&4\\1&1&2\end{vmatrix}\overset{II_k-I_k}{\underset{III_k-I_k\cdot 2}{=\!=}}\begin{vmatrix}3&-1&-2\\2&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\1&0\end{vmatrix}=2$

$B_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=2$ $\quad B_{21}=(-1)^2\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=0$ $\quad B_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&4\\3&4\end{vmatrix}=-4$

$B_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&4\\1&2\end{vmatrix}=0$ $\quad B_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}=2$ $\quad B_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&4\\2&4\end{vmatrix}=-4$

$B_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad B_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad B_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=5$

$$B_{kof}^T=\begin{bmatrix}2&0&-4\\0&2&-4\\-1&-1&5\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&-4\\0&2&-4\\-1&-1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

tražena inverzna matrica

(3.) Nađi inverznu matricu matrice $C=\begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}$.

Rj. $C^{-1}=\dfrac{1}{\det C}C_{kof}^T$, $\quad\det C=\begin{vmatrix}2&1\\5&4\end{vmatrix}=3$

$C_{11}=(-1)^2\cdot 4=4$ $\quad C_{21}=(-1)^3\cdot 1=-1$

$C_{12}=(-1)^3\cdot 5=-5$ $\quad C_{22}=(-1)^4\cdot 2=2$

$$C_{kof}^T=\begin{bmatrix}4&-1\\-5&2\end{bmatrix}\quad C^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

(4.) Nađi inverznu matricu sljedećih matrica:

a) $A=\begin{bmatrix}3&4&4\\1&6&1\\2&3&3\end{bmatrix}$

b) $B=\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\1&3&2\\-2&-1&-2\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}7&3&3\\6&3&4\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$

Rješenja:

a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&0&-4\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{8}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{14}{5}\end{bmatrix}$

b) $B^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{2}{9}&\frac{4}{9}&\frac{5}{9}\\\frac{5}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{8}{9}\end{bmatrix}$

c) $\det C=8$

Matrične jednačine

U sljedećim primjerima neka su A, B, C, X neke date kvadratne matrice.

$$A^{-1}\cdot B \neq B\cdot A^{-1}$$
$$A\cdot B \neq B\cdot A$$

Matrice se ne mogu dijeliti.

Da bismo odredili nepoznatu X u matričnoj jednačini prvo trebamo izvesti formulu za nepoznatu X.

\# $A\cdot X = B \quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve strane

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$$
$$I\cdot X = A^{-1}\cdot B$$
$$X = A^{-1}\cdot B$$

\# $A\cdot X\cdot B = C \quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve strane

$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B = A^{-1}\cdot C$$
$$I\cdot X\cdot B = A^{-1}\cdot C \quad /B^{-1} \text{ sa desne strane}$$
$$X\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$
$$X\cdot I = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

\# $A\cdot X + I = X - 2I$

$$AX - X = -I - 2I$$
$$\underbrace{(A-I)}_{B}X = -3I$$
$$BX = -3I \quad /\cdot B^{-1} \text{ sa desne strane}$$
$$B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot(-3I)$$
$$I\cdot X = -3B^{-1}$$
$$X = -3(A-I)^{-1}$$

\# $X^{-1}\cdot A = B^{-1} \quad /\cdot A^{-1}$ sa desne strane

$$X^{-1}\cdot A\cdot A^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$X^{-1}\cdot I = B^{-1}\cdot A^{-1}$$
$$X^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \quad /^{(-1)}$$
$$X = A\cdot B$$

\# $A^{-1}\cdot X = X - I$

$$A^{-1}\cdot X - X = -I$$
$$\underbrace{(A^{-1} - I)}_{B}\cdot X = -I$$
$$BX = -I \quad /\cdot B^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$
$$B^{-1}\cdot B\cdot X = -B^{-1}\cdot I$$
$$X = -B^{-1}$$
$$X = -(A^{-1}-I)^{-1}$$

\# $\underbrace{(A+3I)}_{C}(X-I) = B$

$$C(X-I) = B \quad /\cdot C^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$
$$C^{-1}C(X-I) = C^{-1}\cdot B$$
$$X - I = C^{-1}\cdot B$$
$$X = C^{-1}\cdot B + I$$
$$X = (A+3I)^{-1}\cdot B + I$$

\# $B^{-1}\cdot X\cdot A = (3B+2I)^{-1} \quad /\cdot B$ sa lijeve strane

$$B\cdot B^{-1}\cdot X\cdot A = B(3B+2I)^{-1}$$
$$X\cdot A = B(3B+2I)^{-1} \quad /\cdot A^{-1} \text{ sa desne strane}$$
$$X = B(3B+2I)^{-1}\cdot A^{-1}$$

\# $(AXB)^{-1} = B^{-1}(X^{-1}+B) \quad /\cdot(AXB)$ sa lijeve strane

$$(AXB)(AXB)^{-1} = AX\underbrace{BB^{-1}}_{I}(X^{-1}+B)$$
$$I = AX(X^{-1}+B)$$
$$I = AXX^{-1} + AXB$$
$$I = A + AXB$$
$$AXB = I - A \quad \begin{array}{l}/\cdot A^{-1} \text{ sa lijeve str.}\\ /\cdot B^{-1} \text{ sa desne str.}\end{array}$$
$$A^{-1}AXB\cdot B^{-1} = A^{-1}(I-A)\cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1}(I-A)\cdot B^{-1}$$

1. Riješiti matričnu jednačinu $X\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

Rj. $X\cdot A = B \quad /\cdot A^{-1}$ sa desne str.

$$X = B\cdot A^{-1}, \qquad A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix} \begin{array}{c}\underline{I_k - III_k}\\ II_k - III_k\end{array} \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix} = -1.$$

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix} = -1$$
$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\end{vmatrix} = -1$$
$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 1$$
$$A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix} = -2$$
$$A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix} = 3$$
$$A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = -1$$
$$A_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix} = -1$$
$$A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix} = 2$$
$$A_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix} = -1$$

$$A_{kof}^{T} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

(2.) Riješiti matričnu jednačinu $A\cdot X = X + I$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rj.

$AX = X + I$

$AX - X = I$

$(A-I)X = I \quad /\cdot(A-I)^{-1}$ sa lijeve strane

$(A-I)(A-I)^{-1}X = (A-I)^{-1}\cdot I$

$X = (A-I)^{-1}$

$$C = A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} C_{kof}^{T}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{II_k + III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$ $\qquad C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4$ $\qquad C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\qquad C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$C_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ rješenje

(3.) Riješiti matričnu jednačinu $(A+B)^{-1}AX^{-1} = B^{-1}$, gdje su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rj.

$(A+B)^{-1}A\cdot X^{-1} = B^{-1} \quad /\cdot(A+B)$ sa lijeve strane

$(A+B)(A+B)^{-1}\cdot A\cdot X^{-1} = (A+B)\cdot B^{-1}$

$A\cdot X^{-1} = (A+B)\cdot B^{-1} \quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve strane

$A^{-1}\cdot A\cdot X^{-1} = A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1}$

$X^{-1} = A^{-1}(A+B)\cdot B^{-1} \quad /^{-1}$

$X = B(A+B)^{-1}A$

$C = A + B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{\det C} C_{kof}^{T}$, $\det C = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13$,

$C_{11} = (-1)^2\cdot 3 = 3$

$C_{12} = (-1)^3\cdot 1 = -1$

$C_{21} = (-1)^3\cdot(-1) = 1$

$C_{22} = (-1)^4\cdot 4 = 4$

$$C_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$$

$$X = B\cdot C^{-1}\cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{13}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{15}{13} & -\frac{6}{13} \\ \frac{9}{13} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

(4.) Riješiti matričnu jednačinu $(A+3I)(X-I) = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 21 & 1 \\ 2 & 50 & -2 \\ 1 & -22 & 0 \end{bmatrix}$ i I jedinična matrica.

Rj.

$(A+3I)(X-I) = B \quad /\cdot(A+3I)^{-1}$ sa lijeve strane

$(A+3I)^{-1}(A+3I)(X-I) = (A+3I)^{-1}\cdot B$

$X - I = (A+3I)^{-1}\cdot B$

$X = (A+3I)^{-1}\cdot B + I$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} C_{kof}^{T}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 11 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_R + III_R}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 11 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -1$$

$$C = A + 3I = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 11 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 11$

$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 1$

$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5$ $\qquad C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 22$

$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\qquad C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1$

$$C_{kof}^{T} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 22 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & -5 & -22 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad C^{-1}\cdot B = \begin{bmatrix} -11 & -5 & -22 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & 21 & 1 \\ 2 & 50 & -2 \\ 1 & -22 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X=(A+3I)^{-1}\cdot B+I=\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&4&0\\2&1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&5&0\\2&1&0\end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

5. Riješiti matričnu jednačinu $(X^{-1}+B^{-1})^{-1}=AX$ ako su $A=\begin{bmatrix}3&3&2\\-4&1&-4\\-3&1&-3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$.

Rj. $(X^{-1}+B^{-1})^{-1}=AX$ $\quad/\cdot(X^{-1}+B^{-1})$ sa desne strane

$(X^{-1}+B^{-1})^{-1}\cdot(X^{-1}+B^{-1})=AX(X^{-1}+B^{-1})$

$I=A+AXB^{-1}$

$AXB^{-1}=I-A$ $\quad/\cdot A^{-1}$ sa lijeve str. $\cdot B$ sa desne str.

$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B^{-1}\cdot B=A^{-1}(I-A)\cdot B$

$X=A^{-1}(I-A)\cdot B$

$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{-1}$

$\det A=\begin{vmatrix}3&3&2\\-4&1&-4\\-3&1&-3\end{vmatrix}\underline{\underline{I_k-III_k}}\begin{vmatrix}1&3&2\\0&1&-4\\0&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-4\\1&-3\end{vmatrix}=-3+4=1$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&-4\\1&-3\end{vmatrix}=1$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-4&-4\\-3&-3\end{vmatrix}=0$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-4&1\\-3&1\end{vmatrix}=-1$

$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}3&2\\1&-3\end{vmatrix}=11$ $\qquad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&2\\1&-4\end{vmatrix}=-14$

$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&2\\-3&-3\end{vmatrix}=-3$ $\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&2\\-4&-4\end{vmatrix}=4$

$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&3\\-3&1\end{vmatrix}=-12$ $\qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&3\\-4&1\end{vmatrix}=15$

$A_{kof}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\11&-3&-12\\-14&4&15\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&11&-14\\0&-3&4\\-1&-12&15\end{bmatrix}$, $\quad X=A^{-1}(I-A)\cdot B=\begin{bmatrix}1&11&-14\\0&-3&4\\-1&-12&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-3&-2\\4&0&4\\3&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\1&-2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&11&-14\\0&-3&4\\-1&-12&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&8&-6\\4&-4&12\\2&-2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&-8&-14\\-4&4&4\\-13&10&12\end{bmatrix}$ rješenje matrične jednačine

6. Riješiti matričnu jednačinu:

$$X\cdot\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&3\\4&3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&4\\3&4&2\end{bmatrix}=X\cdot\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&4\\3&4&2\end{bmatrix}.$$

Ako označimo $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&3\\4&3&2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&4\\3&4&2\end{bmatrix}$ imamo

$XA+B=XB$

$XA-XB=-B$

$X(A-B)=-B$ $\quad/\cdot(A-B)^{-1}$ sa desne strane

$X=-B(A-B)^{-1}$

$\det C=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}\underline{\underline{I_k+II_k}}\begin{vmatrix}0&-1&-1\\2&1&-1\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)=2$

$C=A-B=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$

$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C_{kof}^{T}$

$C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=-1$ $\qquad C_{21}=1 \qquad C_{31}=2$

$C_{12}=(-1)^3\cdot 1=-1$ $\qquad C_{22}=1 \qquad C_{32}=0$

$C_{13}=-2$ $\qquad C_{23}=0 \qquad C_{33}=2$

$C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}$, $\quad X=-B\cdot C^{-1}=-\begin{bmatrix}1&4&5\\0&1&4\\3&4&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&1&2\\-1&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}$

$X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-15&5&12\\-9&1&8\\-11&7&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{2}&-\frac{5}{2}&-6\\\frac{9}{2}&-\frac{1}{2}&-4\\\frac{11}{2}&-\frac{7}{2}&-5\end{bmatrix}$ rješenje matrične jednačine

7. Riješiti matričnu jednačinu $(A+X)(B-2I)=A$, ako su $A=\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\1&-2&3\\4&3&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&-2&1\\1&-1&0\\1&-2&2\end{bmatrix}$, I jedinična matrica.

8. Riješiti matričnu jednačinu $A^{-1}X+B=AX$, ako su $A=\begin{bmatrix}-2&5\\-1&3\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}4&5\\6&7\end{bmatrix}$.

9. Riješiti matričnu jednačinu $(XB^{-1})^{-1}=X^{-1}+A$, ako su $A=\begin{bmatrix}-1&3&1\\1&2&3\\0&3&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\5&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}$.

Rješenja:

7. $X=\begin{bmatrix}-2&10&-1\\2&2&-5\\-6&-14&19\end{bmatrix}$ $\qquad$ 8. $X=\begin{bmatrix}4&5\\6&7\end{bmatrix}$ $\qquad$ 9. $X=\begin{bmatrix}3&-\frac{3}{2}&-\frac{17}{2}\\1&-1&-5\\0&\frac{5}{2}&\frac{15}{2}\end{bmatrix}$

Data je matrična jednačina $A(X-B)^{-1}=B^{-1}A$ i matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \quad i \quad B=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}.$$

a) Koji uslov moraju zadovoljavat matrice A i B da bi data jednačina imala rješenje $X=2B$?

b) Riješiti datu jednačinu ako matrice A i B ne zadovoljavaju uslov dobijen pod a)

Rj. a) $A(X-B)^{-1}=B^{-1}A$

$X=2B$

$A\cdot B^{-1}=B^{-1}A$ uslov koji moraju zadovoljavati matrice A i B da bi data matrica imala rješenje $X=2B$.

Uslov možemo pisati i na drugi način:

$A=B^{-1}AB$

ili

$B=A^{-1}\cdot B\cdot A$

b)

$A(X-B)^{-1}=B^{-1}A \quad /\cdot(X-B)$ sa desne str

$B^{-1}A(X-B)=A \quad /\cdot B$ sa lijeve str.

$A(X-B)=BA \quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve str.

$X-B=A^{-1}BA$

$X=A^{-1}BA+B$

i odavdje možemo pročitati uslov koji smo dobili pod a) (ako je $B=A^{-1}BA$ tada jednačina ima rješenje $X=2B$)

Provjerimo da li je $B=A^{-1}BA$.

Nađimo prvo A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2 \quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=-2 \quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0 \quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1 \quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\0&-1\end{vmatrix}=0 \quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}=1 \quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-2&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \qquad A_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=2\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}, \quad B\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\3&0&4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B\cdot A=2\begin{bmatrix}2&-2&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&3&3\\3&0&4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-1&3&-1\\5&3&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

ovdje vidimo da matrice A i B ne zadovoljavaju uslov dobijen pod a)

$$X=A^{-1}BA+B=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&0\\2&1&0\\3&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\\frac{3}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{11}{2}&\frac{1}{2}&\frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

rješenje matrične jednačine

Riješiti matričnu jednačinu $X\cdot A^{-1}=B^{-1}$ ako su

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&2&1\\1&1&-4\end{bmatrix} \quad i \quad B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Rj.

$X\cdot A^{-1}=B^{-1} \quad /\cdot A$ sa desne strane

$X\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}=B^{-1}\cdot A$

$X=B^{-1}\cdot A$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}B_{kof}^{T}$$

$$\det B=\begin{vmatrix}2&1&-1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{vmatrix}\underline{\underline{I_R-II_R}}$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&1\\2&1&-2\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}=0+1$$

$\det B=1$

$B_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}=1 \quad B_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1 \quad B_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}=-1$

$B_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&-2\\-1&1\end{vmatrix}=0 \quad B_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}=1 \quad B_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&-1\\2&-2\end{vmatrix}=2$

$B_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}=1 \quad B_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}=-1 \quad B_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}=0$

$$B_{kof}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&-1\\-1&2&0\end{bmatrix}, \quad B_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}, \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$X=B^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&4\\3&2&1\\1&1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&7\\5&4&-7\\-1&1&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}2-3-1 & 0+3+2 & 2-3+0\\3-2-1 & 0+2+2 & 3-2+0\\4-1+4 & 0+1-8 & 4-1+0\end{array}$$

$$X=\begin{bmatrix}-2&0&7\\5&4&-7\\-1&1&3\end{bmatrix}$$

traženo rješenje.

Riješiti matričnu jednačinu $X^{-1}AB=B^{-1}A^{-1}$,

$$A=\begin{bmatrix}1&1&6\\2&-3&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-4&1\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

Rj.

$$X^{-1}AB=B^{-1}A^{-1}$$

$$X^{-1}AB=(AB)^{-1}\quad /(AB)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X^{-1}=(AB)^{-1}(AB)^{-1}$$

$$X=(AB)\cdot(AB)$$

$$X=(AB)^2$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1&1&6\\2&-3&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-4&1\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&-5&13\\1&10&-3\\2&-4&3\end{bmatrix}$$

$2+1+6$, $-1-4+0$, $0+1+12$; $4-3+0$, $-2+12+0$, $0-3+0$; $0+1+1$, $0-4+0$, $0+1+2$

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}9&-5&13\\1&10&-3\\2&-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&-5&13\\1&10&-3\\2&-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}102&-147&171\\13&107&-26\\20&-62&47\end{bmatrix}$$

$81-5+26$, $9+10-6$, $18-4+6$; $-45-50-52$, $-5+100+12$, $-10-40-12$; $117+15+39$, $13-30-9$, $26+12+9$

$$X=\begin{bmatrix}102&-147&171\\12&107&-26\\20&-62&47\end{bmatrix}$$

Riješiti matričnu jednačinu $(A+I)^{-1}\cdot X\cdot(3A+I)=2A$ gdje je I jedinična matrica drugog reda a

$$A=\begin{bmatrix}7&8\\-6&-7\end{bmatrix}.$$

Rj.

$$(A+I)^{-1}\cdot X\cdot(3A+I)=2A\quad /(A+I) \text{ sa lijeve strane}$$

$$X\cdot(3A+I)=(A+I)\cdot 2A\quad /\cdot(3A+I)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X=(A+I)\cdot 2A\cdot(3A+I)^{-1}$$

$$A=\begin{bmatrix}7&8\\-6&-7\end{bmatrix}\quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad A+I=\begin{bmatrix}8&8\\-6&-6\end{bmatrix}$$

$20\cdot 22$: 40, 40, 440

$$3A+I=\begin{bmatrix}22&24\\-18&-20\end{bmatrix}\quad 3A=\begin{bmatrix}21&24\\-18&-21\end{bmatrix}$$

$18\cdot 24$: 72, 36, 432

Označimo sa $B=3A-I$ pa pronađimo B^{-1}

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot B_{kof}^{T}\qquad \det B=\begin{vmatrix}22&24\\-18&-20\end{vmatrix}=-440+432=-8$$

$B_{11}=(-1)^2\cdot(-20)=-20$, $B_{21}=(-1)^3\cdot 24=-24$

$B_{12}=(-1)^3\cdot(-18)=18$, $B_{22}=(-1)^4\cdot 22=22$

$$B_{kof}=\begin{bmatrix}-20&18\\-24&22\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-20&-24\\18&22\end{bmatrix}=(3A+I)^{-1}$$

$$X=(A+I)\cdot 2A\cdot(3A+I)^{-1}=\begin{bmatrix}8&8\\-6&-6\end{bmatrix}\cdot 2\cdot\begin{bmatrix}7&8\\-6&-7\end{bmatrix}\cdot\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}-20&-24\\18&22\end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix}4&4\\-3&-3\end{bmatrix}\cdot 2\begin{bmatrix}7&8\\-6&-7\end{bmatrix}\cdot\frac{-1}{8}\cdot 2\begin{bmatrix}-10&-12\\9&11\end{bmatrix}=8\cdot\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}4&4\\-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&8\\-6&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&-12\\9&11\end{bmatrix}$$

$$=(-1)\begin{bmatrix}4&4\\-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&-12\\9&11\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}-4&-4\\3&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&4\\-3&-3\end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

(#) Riješiti matričnu jednačinu $(AXB)^{-1} = B^{-1}(X^{-1} + B)$ ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj.

$$(AXB)^{-1} = B^{-1}(X^{-1}+B)$$

$$B^{-1}X^{-1}A^{-1} = B^{-1}X^{-1} + B^{-1}\cdot B \qquad / \cdot B \text{ sa lijeve strane}$$

$$X^{-1}A^{-1} = X^{-1} + B$$

$$X^{-1}A^{-1} - X^{-1} = B$$

$$X^{-1}(A^{-1} - I) = B \qquad / \cdot (A^{-1}-I)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X^{-1} = B(A^{-1}-I)^{-1} \qquad /^{-1}$$

$$X = (A^{-1}-I)\cdot B^{-1}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix} \overset{I_k + II_k}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \end{vmatrix} \underset{III_v - I_v\cdot 2}{\overset{II_v - I_v}{=\!=}}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -11 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} = (-1)(-11+12) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$A_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 3+5 = 8 \qquad A_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -(4+25) = -29 \qquad A_{31} = 11$$

$$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-3) = 5 \qquad A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-15 = -18 \qquad A_{32} = 7$$

$$A_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10+9 = -1 \qquad A_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-15+12) = 3 \qquad A_{33} = -1$$

$$A_{kof} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & -1 \end{bmatrix}. \qquad A^{-1} = (-1)\begin{bmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \underset{III_v - I_v\cdot 2}{\overset{II_v - I_v\cdot 2}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 9-36 = -27$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\cdot B_{kof}^{T} \underset{\substack{\text{ZA VJEŽBU} \\ \text{(slično)}}}{=\!=} \frac{(-1)}{-27}\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\cdot 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} - I = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 29 & -11 \\ -5 & 17 & -7 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = (A^{-1}-I)\cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 29 & -11 \\ -5 & 17 & -7 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 27 & 33 & -87 \\ 15 & 21 & -51 \\ -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & \frac{11}{3} & -\frac{29}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{17}{3} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$ rješenje matrične jednačine

Riješiti matričnu jednačinu $A\cdot X^{-1}\cdot B = B\cdot A$, ako je $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.

Rj.

$AX^{-1}B = B\cdot A$ $\quad /\cdot A^{-1}$ sa lijeve strane

$X^{-1}B = A^{-1}B\cdot A$ $\quad /\cdot B^{-1}$ sa desne strane

$X^{-1} = A^{-1}B\cdot A\cdot B^{-1}$ $\quad /^{-1}$

$X = BA^{-1}B^{-1}A$

$A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$ $\quad \det A=\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{kof}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$

$A_{11}=1 \quad A_{21}=-1$

$A_{12}=0 \quad A_{22}=1$

$A_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$

$B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\cdot B_{kof}^{T}$ $\quad B_{11}=1,\ B_{12}=-1,\ B_{21}=0,\ B_{22}=1$ $\quad B_{kof}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ $\quad B_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$ $\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$

$\det B=\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1$

$B\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$B^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}$

$X=BA^{-1}\cdot B^{-1}A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ traženo rješenje

Riješiti matričnu jednačinu: $AX-2B=3X+A$ gdje je $A=\begin{bmatrix}6&1&0\\0&5&2\\0&0&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&3&1\\4&0&3\end{bmatrix}$.

Rj.

$AX-2B=3X+A$

$AX-3X=2B+A$

$\underbrace{(A-3I)}_{M}X=\underbrace{2B+A}_{N}$

$MX=N$ $\quad /\cdot M^{-1}$ sa lijeve str.

$M^{-1}MX=M^{-1}\cdot N$

$X=M^{-1}\cdot N$

$M=A-3I=\begin{bmatrix}6&1&0\\0&5&2\\0&0&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$N=2B+A=\begin{bmatrix}-2&4&0\\4&6&2\\8&0&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&1&0\\0&5&2\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&0\\4&11&4\\8&0&10\end{bmatrix}$

$M^{-1}=\dfrac{1}{\det M}M_{kof}^{T}$

$\det M=\begin{vmatrix}3&1&0\\0&2&2\\0&0&1\end{vmatrix}=3\cdot2\cdot1=6$

$M_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}=2$ $\quad M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$

$M_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}=0$ $\quad M_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&0\\0&1\end{vmatrix}=3$

$M_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\quad M_{23}=(1)^5\begin{vmatrix}3&1\\0&0\end{vmatrix}=0$

$M_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}=2$

$M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&0\\0&2\end{vmatrix}=-6$ $\quad M_{kof}=\begin{bmatrix}2&0&0\\-1&3&0\\2&-6&6\end{bmatrix}$, $\quad M_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&3&-6\\0&0&6\end{bmatrix}$

$M_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=6$

$M^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&3&-6\\0&0&6\end{bmatrix}$, $\quad X=M^{-1}\cdot N=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-1&2\\0&3&-6\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&5&0\\4&11&4\\8&0&10\end{bmatrix}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}20&-1&16\\-36&33&48\\48&0&60\end{bmatrix}$

$8-4+16$ $\quad 0+12-48$

$10-11+0$ $\quad 0+33+0$

$0-4+20$ $\quad 12-60$

$X=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}&-\frac{1}{6}&\frac{8}{3}\\-6&\frac{11}{2}&8\\8&0&10\end{bmatrix}$ traženo rješenje

(#) Riješiti matričnu jednačinu $(XA+B)^{-1}(XC+B)=C$, ako je $A=\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&2&-1\\0&0&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&-1&2\\0&0&2\end{bmatrix}$

Rj. $(XA+B)^{-1}(XC+B)=C \quad /(XA+B)$ sa lijeve strane

$$\underbrace{(XA+B)(XA+B)^{-1}}_{I}(XC+B)=(XA+B)\cdot C$$

$$XC+B=XAC+BC$$

$$XC-XAC=BC-B$$

$$X(C-AC)=BC-B \quad /(C-AC)^{-1} \text{ sa desne strane}$$

$$X=B(C-I)(C-AC)^{-1}$$

$$C-I=\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$B(C-I)=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&4&3\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}-1&2&3\\0&2&-1\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&2\\0&-1&2\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&8\\0&-2&2\\0&0&6\end{bmatrix}$$

Označimo sa $D=C-AC=\begin{bmatrix}-2&4&-6\\0&1&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$

Izračunajmo D^{-1}: $\quad D^{-1}=\frac{1}{\det D}D_{kof}^{T}$

$D_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&0\\0&-4\end{vmatrix}=-4$ $\quad D_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}4&-6\\0&-4\end{vmatrix}=16$ $\quad D_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}4&-6\\1&0\end{vmatrix}=6$

$D_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&0\\0&-4\end{vmatrix}=0$ $\quad D_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&-6\\0&-4\end{vmatrix}=8$ $\quad D_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2&-6\\0&0\end{vmatrix}=0$

$D_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\quad D_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-2&4\\0&0\end{vmatrix}=0$ $\quad D_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-2&4\\0&1\end{vmatrix}=-2$

$\det D=\begin{vmatrix}-2&4&-6\\0&1&0\\0&0&-4\end{vmatrix}=(-4)\begin{vmatrix}-2&4\\0&1\end{vmatrix}=8$ $\quad D_{kof}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\16&8&0\\6&0&-2\end{bmatrix}$ $\quad D_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}-4&16&6\\0&8&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$D^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&2&\frac{3}{4}\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$, $\quad X=B(C-I)(C-AC)^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-4&4&3\\0&2&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&16&6\\0&8&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$

$$X=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}16&-32&-30\\0&16&2\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4&-\frac{15}{4}\\0&2&\frac{1}{4}\\0&0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$ traženo rješenje

(#) Riješiti matričnu jednačinu $XAB=C$, $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}$, $C=[0\ 4\ 4]$.

Rj. $XAB=C \quad /\cdot(AB)^{-1}$ sa desne strane

$$X(AB)(AB)^{-1}=C\cdot(AB)^{-1}$$

$$X=C\cdot(AB)^{-1}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&4&1\\-1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\det(AB)=\begin{vmatrix}0&2&0\\1&4&1\\-1&2&3\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}=(-2)(3+1)=-8$$

AB označimo sa M, nađimo M^{-1}

$M_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4&1\\2&3\end{vmatrix}=10$ $\quad M_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&0\\2&3\end{vmatrix}=-6$ $\quad M_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&0\\4&1\end{vmatrix}=2$

$M_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}=-4$ $\quad M_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&0\\-1&3\end{vmatrix}=0$ $\quad M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}=0$

$M_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&4\\-1&2\end{vmatrix}=6$ $\quad M_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}0&2\\-1&2\end{vmatrix}=-2$ $\quad M_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix}=-2$

$M_{kof}=\begin{bmatrix}10&-4&6\\-6&0&-2\\2&0&-2\end{bmatrix}$, $\quad M_{kof}^{T}=\begin{bmatrix}10&-6&2\\-4&0&0\\6&-2&-2\end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{\det M}\cdot M_{kof}^{T}=\frac{-1}{8}\begin{bmatrix}10&-6&2\\-4&0&0\\6&-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5/4&3/4&-1/4\\1/2&0&0\\-3/4&1/4&1/4\end{bmatrix}$$

$$X=C\cdot(AB^{-1})=[0\ 4\ 4]\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{bmatrix}10&-6&2\\-4&0&0\\6&-2&-2\end{bmatrix}=\left(-\frac{1}{8}\right)[8\ -8\ -8]$$

$X=[-1\ 1\ 1]$ rješenje matrične jednačine

Operacije i algebarske strukture

Grupoid, polugrupa i grupa

<u>Definicija</u> Pod binarnom operacijom u skupu A podrazumijevamo preslikavanje $f: A\times A \to B$ (sa A^2 u B).
Pod operacijom dužine $n\in\mathbb{N}$ u skupu A podrazumijevamo preslikavanje $f: A^n = A\times A\times \ldots \times A \to B$ (sa A^n u B).
Ako je $n=1$ govorimo o unarnoj operaciji.
Ako je $n=3$ govorimo o ternarnoj operaciji.

Umjesto funkcionalnog znaka f pisat ćemo neko od znakova $*, \circ, \square, \oplus, \otimes, +, \cdot$ itd.

<u>Primjer</u> a) Preslikavanje $+: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ je binarna operacija u skupu $\mathbb{N}$. Umjesto $+(3,5)=8$ pišemo $3+5=8$.
b) Preslikavanje $^-: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, definisano na sljedeći način $z=a+ib$ preslikava u $\bar{z}=a-ib$, je unarna operacija u skupu kompleksnih brojeva.
c) Preslikavanje $V: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definisano na sljedeći način $V(a,b,c)=a\cdot b\cdot c$ je ternarna operacija u skupu realnih brojeva (V u geometriji predstavlja zapreminu kvadra ili kocke).
d) Preslikavanje $-: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ je binarna operacija u skupu $\mathbb{N}$. Umjesto $-(3,45)=-42$ pišemo $3-45=-42$.

<u>Definicija</u> Uređeni par $(G,\circ)$ skupa G i operacije $\circ: G\times G\to G$ nazivamo grupoid.

U literaturi se često pored riječi grupoid koristi i termin da je skup G zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$, tj. za $\forall a,b\in G$ imamo da je $a\circ b\in G$.

<u>Primjer</u> a) Uređeni par $(\mathbb{N},\cdot)$ skupa prirodnih brojeva i operacije množenja jest grupoid.
b) Uređeni par $(\mathbb{Q},:)$ skupa racionalnih brojeva i operacije dijeljenja jest grupoid.
c) Uređeni par $(\mathbb{I},\cdot)$ skupa iracinalnih brojeva i operacije množenja nije grupoid, jer npr. $\sqrt{2}\in\mathbb{I}$ ali $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin\mathbb{I}$
d) Uređeni par $(\mathbb{Z},:)$ skupa cijelih brojeva i operacije dijeljenja nije grupoid (objasniti zašto?).

<u>Definicija</u> Za operaciju $\circ$ zadanu u skupu G kažemo da je
a) asocijativna akko $\forall(a,b,c\in G)\ a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$.
b) komutativna akko $\forall(a,b\in G)\ a\circ b=b\circ a$

<u>Primjer</u> a) Operacija množenja jest asocijativna u skupu $\mathbb{Q}$.
b) Množenje matrica nije komutativna operacija (kako se množe dvije matrice vidjećemo kasnije)

<u>Definicija</u> Ako je u grupoidu $(G,\circ)$ operacija $\circ$ asocijativna onda onda kažemo da je uređeni par $(G,\circ)$ polugrupa.

<u>Primjer</u> a) $(\mathbb{R},+)$ je polugrupa.
b) $(\mathbb{C},\cdot)$ je polugrupa.

<u>Definicija</u> Element e grupoida $(G,\circ)$ naziva se neutralni element akko za njega vrijedi $\forall(x\in G)\ e\circ x = x\circ e = x$.

<u>Primjer</u> a) Grupoid $(\mathbb{Z},+)$ ima neutralni element 0,
b) Grupoid $(\mathbb{R},\cdot)$ ima neutralni element 1.
c) Grupoid $(\mathbb{N},+)$ nema neutralni element. (Zašto?)

Definicija Neka je $(G, \circ)$ polugrupa sa neutralnim elementom e. Za element $a \in G$ kažemo da ima inverzni element $a^{-1} \in G$ akko $\forall (a \in G)\ \exists (a^{-1} \in G)\ a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$.

Primjer a) Polugrupa $(\mathbb{Z}, +)$ ima inverzni element zato što

$$\forall (a \in \mathbb{Z})\ \exists (-a \in \mathbb{Z})\ a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

b) Polugrupa $(\mathbb{R}, \cdot)$ ima inverzni element zato što

$$\forall (a \in \mathbb{R})\ \exists (\tfrac{1}{a} \in \mathbb{R})\ a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

c) Polugrupa $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ nema inverzni element (Zašto?)

Definicija Polugrupa $(G, \circ)$ s neutralnim elementom e u kojoj svaki element $a \in G$ ima inverzni element $a^{-1} \in G$ nazivamo grupa.

Abelova grupa

Definicija Komutativnu grupu $(G, \circ)$ nazivamo Abelova grupa.

(#) Dokažite da je $G = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0, a \neq 1\}$ sa operacijom $a * b = a^{\log_5 b}$ grupa.

Rj: Trebamo pokazati da je operacija $*$ zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element i da postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$\forall (a, b \in G)\ a * b = a^{\log_5 b} \in \mathbb{R}$

Kako je $a > 0$ i $a \neq 1$ $(a \in G)$ to je i

$a * b > 0$ i $a * b \neq 1 \Rightarrow a * b \in G$

Operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall (a, b, c \in G)\ (a * b) * c = a^{\log_5 b} * c = \left(a^{\log_5 b}\right)^{\log_5 c} = a^{\log_5 c \cdot \log_5 b} \quad \ldots (1)$$

$$a * (b * c) = a * b^{\log_5 c} = a^{\log_5 b^{\log_5 c}} = a^{\log_5 c \cdot \log_5 b} \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$ Operacija $*$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (a \in G)(\exists e \in G)\ a * e = a$ Neutralni element je 5

$$a^{\log_5 e} = a$$

$$e = 5$$

INVERZNI ELEMENT

$\forall (a \in G)\ \exists (a^* \in G)\ a * a^* = 5$

$$a^{\log_5 a^*} = 5 \quad / \log_5$$

$$\log_5 a^{\log_5 a^*} = \log_5 5$$

$$\log_5 a^* \cdot \log_5 a = 1$$

$$\log_5 a^* = \frac{1}{\log_5 a}$$

$$\log_5 a^* = \log_a 5$$

$$a^* = 5^{\log_a 5}$$

Inverzni element elementa a je $5^{\log_a 5}$.

Skup G sa operacijom $*$ jest grupa. q.e.d.

U skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definisana je binarna operacija $\oplus$ na sljedeći način $x \oplus y = x + y - 1$. Dokazati da je $(\mathbb{Z}, \oplus)$ Abelova grupa.

Rj. Trebamo pokazati da je operacija $\oplus$ zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element, da postoji inverzni element i da je operacija komutativna.

ZATVORENOST $(\forall (x, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y \in \mathbb{Z})$

Ako su $x, y \in \mathbb{Z}$ tada $x + y - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \oplus y \in \mathbb{Z}$

operacija $\oplus$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST $(\forall (x, y, z \in \mathbb{Z})\ (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z))$

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - 1) \oplus z = (x + y - 1) + z - 1 = x + (y + z - 1) - 1 = x \oplus (y + z - 1)$$
$$= x \oplus (y \oplus z)$$

oper. $\oplus$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT $(\forall (x \in \mathbb{Z})\ \exists (e \in \mathbb{Z})\ x \oplus e = e \oplus x = x)$

$x \oplus e = x$

$x + e - 1 = x$

$e - 1 = 0$

$e = 1$

Neutralni element je 1.

$1 \oplus x = 1 + x - 1 = x$

INVERZNI ELEMENT $(\forall (x \in \mathbb{Z})\ \exists (x^* \in \mathbb{Z})\ x \oplus x^* = x^* \oplus x = e)$

$x \oplus x^* = 1$

$x + x^* - 1 = 1$

$x^* = -x + 2$

Inverzni element elementa $x \in \mathbb{Z}$ je $x^* = -x + 2$

$(-x + 2) \oplus x = -x + 2 + x - 1 = 1$

KOMUTATIVNOST $(\forall (x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})\ x \oplus y = y \oplus x)$

$x \oplus y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \oplus x$

operacija $\oplus$ je komutativna

$(\mathbb{Z}, \oplus)$ jest Abelova grupa

q.e.d.

Ispitati da li uređen par $(\mathbb{R}^+, *)$, $\mathbb{R}^+$ je skup pozitivnih realnih brojeva a operacija $*$ je definisana $a * b = a^b$, ima strukturu grupe.

Rj. Trebamo da li je operacija $*$ na skupu G zatvorena, asocijativna, da li postoji neutralni element i da li postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$\forall (a, b \in \mathbb{R}^+)\ a * b = a^b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a * b \in \mathbb{R}^+$

operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall (a, b, c \in \mathbb{R}^+)\quad \left.\begin{array}{l} (a*b)*c = a^b * c = (a^b)^c = a^{bc} \\ a*(b*c) = a * b^c = a^{b^c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^{bc} \neq a^{b^c}$$

$\Rightarrow (a*b)*c \neq a*(b*c)$

operacija $*$ nije asocijativna

$(\mathbb{R}^+, *)$ nije grupa

(#) Ispitati da li skup $S=\left\{\frac{1+2m}{1-2n} \mid m,n\in\mathbb{Z}\right\}$ u odnosu na operaciju "obično" množenje ima strukturu grupe.

Rj. Trebamo ispitati da li je operacija "obično" množenje zatvorena, asocijativna, da li postoji neutralni element i da li postoji inverzni element.

ZATVORENOST

$$\forall(x,y\in S)\quad x\cdot y=\frac{1+2m_1}{1-2n_1}\cdot\frac{1+2m_2}{1-2n_2}=\frac{1+2m_2+2m_1+4m_1m_2}{1-2n_2-2n_1+4n_1n_2}=$$

$x=\frac{1+2m_1}{1-2n_1}$, $y=\frac{1+2m_2}{1-2n_2}$

$$=\frac{1+2\overbrace{(m_1+m_2+2m_1m_2)}^{\in\mathbb{Z}}}{1-2\underbrace{(n_1+n_2-2n_1n_2)}_{\in\mathbb{Z}}}\in S$$

Operacija "obično" množenje je zatvorena u odnosu na S

ASOCIJATIVNOST

$$\forall(x,y,z\in S)\quad (x\cdot y)\cdot z=\left(\frac{1+2m_1}{1-2n_1}\cdot\frac{1+2m_2}{1-2n_2}\right)\cdot\frac{1+2m_3}{1-2n_3}=\frac{1+2m_1}{1-2n_1}\left(\frac{1+2m_2}{1-2n_2}\cdot\frac{1+2m_3}{1-2n_3}\right)$$

$=x\cdot(y\cdot z)$ operacija "obično" množenje je asocijativna u odnosu na S

NEUTRALNI ELEMENT

$$\forall(x\in S)\ \exists(e\in S)\quad x\cdot e=x$$

$$\frac{1+2m}{1-2n}\cdot e=\frac{1+2m}{1-2n}\Rightarrow e=1=\frac{1+2\cdot0}{1-2\cdot0}\in S$$

Neutralni element je 1.

INVERZNI ELEMENT

$$\forall(x\in S)\ \exists(x^*\in S)\quad x\cdot x^*=1$$

$$\frac{1+2m}{1-2n}\cdot x^*=1\Rightarrow x^*=\frac{1-2n}{1+2m}=\frac{1+2(-n)}{1-2(-m)}=$$

$$=\frac{1+2k}{1-2p},\ k,p\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow x^*\in S\Rightarrow$ Postoji neutralni element

Skup S u odnosu na operaciju "obično" množenje ima strukturu grupe. q.e.d.

(#) Dat je skup $G=\{a,b,c\}$. Koliko ima različitih binarnih operacija $*$ tako da je $(G,*)$ grupoid? Koliko je među njima komutativnih grupoida?

Rj. Uređen par $(G,*)$ skupa G i operacije $*:G\times G\to G$ nazivamo grupoid. (za operaciju $*$ kažemo da je zatvorena u G). Definisat ću jednu od mogućih izgleda operacije $*$ tako da $(G,*)$ bude grupoid:

*	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

G ima tri elementa,

G^2 će imati $3^2=9$ elemenata,

Različitih grupoida ima 3^9.

Operacija $*$ je komutativna ako je $a*b=b*a$.

Pokažimo primjer operacije $*$ tako da grupoid bude komutativan:

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	b
c	b	b	c

Da bi grupoid bio komutativan mi elemente na dijagonali i ispod nje možemo uzeti proizvoljno dok preostala tri člana upisujemo tako da tablica bude simetrična.

Komutativnih grupoida ima 3^6.

(#) Neka je $(G,\circ)$ grupa. Na G je definisana i operacija $*$ na sljedeći način $x * y = x \circ g \circ y$ gdje je g fiksiran element iz G. Dokazati da je $(G,*)$ grupa.

Rj. Trebamo pokazati da je $(G,*)$ grupa tj. da je operacija $*$ na skupu G zatvorena, asocijativna, da postoji neutralni element, da postoji inverzni element i da je operacija $*$ komutativna.

ZATVORENOST

$\forall (x,y \in G) \quad x * y = x \circ g \circ y \in G$ zato što je operacija $\circ$ zatvorena ($(G,\circ)$ je grupa).

operacija $*$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$$\forall (x,y,z \in G) \quad (x*y)*z = (x \circ g \circ y) * z = \underbrace{(x \circ g \circ y)}_{a} \circ \underbrace{g}_{b} \circ \underbrace{z}_{c}$$

$$x*(y*z) = x*(y \circ g \circ z) = x \circ g \circ (y \circ g \circ z)$$

Operacija kružić je asocijativna (zato što je $(G,\circ)$ grupa)

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$\Rightarrow \quad (x*y)*z = (x \circ g \circ y) \circ g \circ z = x \circ g \circ (y \circ g \circ z) = x*(y*z)$$

operacija $*$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall (x \in G) \ \exists (e \in G) \quad x * e = x$

$x \circ g \circ e = x \Rightarrow$ kako je $(G,\circ)$ grupa, to je $g \circ e$ neutralni element operacije $\circ$

$(G,\circ)$ je grupa $\Rightarrow \forall (g \in G) \ \exists (g^{-1} \in G) \quad g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = g \circ e$

G ima inverzni element u odnosu na operaciju $\circ$

$\Rightarrow e = g^{-1}$

Neutralni element skupa G u odnosu na operaciju $*$ je g^{-1}.

INVERZNI ELEMENT

$\forall (x \in G) \exists (x^* \in G) \quad x * x^* = g^{-1}$

$x \circ g \circ x^* = g^{-1} \quad / x^{-1}$ sa lijeve strane

x^{-1} je inverzni element elementa x u odnosu na operaciju $\circ$

$e' \circ g \circ x^* = x^{-1} \circ g^{-1}$

(e' neutralni element u odnosu na oper. $\circ$)

$$g \circ x^* = x^{-1} \circ g^{-1} \quad / g^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$e' \circ x^* = g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1} \Rightarrow x^* = g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1}$$

Inverzni element elementa x je $g^{-1} \circ x^{-1} \circ g^{-1}$

$(G,*)$ jest grupa

q.e.d.

(#) Neka je G skup svih realnih brojeva oblika $x+y\sqrt{2}$ gdje su x i y racionalni brojevi koji nisu istovremeno jednaki nuli, a $\cdot$ operacija množenja. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa.

Rj: $G=\{x+y\sqrt{2} \mid x,y\in\mathbb{Q},\ x^2+y^2>0\}$

ZATVORENOST

$(G,\cdot)$ grupoid, $\cdot : G\times G \to G$

$$\begin{matrix} x_1+y_1\sqrt{2}\in G \\ x_2+y_2\sqrt{2}\in G \end{matrix} \Rightarrow (x_1+y_1\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2}) = x_1x_2+x_1y_2\sqrt{2}+x_2y_1\sqrt{2}+2y_1y_2 =$$

$$=\underbrace{(x_1x_2+2y_1y_2)}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{(x_1y_2+x_2y_1)}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}=s$$

Da bi bilo $s\in G$ trebamo još provjeriti da li je ispunjen uslov

$(x_1x_2+2y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2>0$

Prema pretpostavci je $x_1^2+y_1^2>0$ i $x_2^2+y_2^2>0$ tj $(x_1\neq 0 \vee y_1\neq 0)\wedge$
$\wedge(x_2\neq 0 \vee y_2\neq 0)$

Ako je $x_1y_2+x_2y_1\neq 0$ dokaz za zatvorenost je gotov.

Pretpostavimo $x_1y_2+x_2y_1=0 \Rightarrow x_1y_2=-x_2y_1$

$y_2=-\frac{x_2y_1}{x_1} \Rightarrow x_1 \quad +2y_1y_2 =$

$$= x_1x_2+2y_1\left(-\frac{x_2y_1}{x_1}\right)=\frac{x_1^2x_2-2x_2y_1^2}{x_1}=\frac{x_2(x_1^2-2y_1^2)}{x_1}\neq 0$$

(jer ako bi bilo $x_1^2-2y_1^2=0 \Rightarrow x_1^2=2y_1^2$

$\frac{x_1}{y_1}=\sqrt{2}$ #kontradikcija $(x_1,y_1\in\mathbb{Q})$)

Prema tome $s=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2}\in G$

ASOCIJATIVNOST

$a=(a_1+a_2\sqrt{2})$, $b=(b_1+b_2\sqrt{2})$, $c=(c_1+c_2\sqrt{2})$

$a,b,c\in G \Rightarrow a,b,c\in\mathbb{R}$

Operacija množenja je asocijativna u $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\cdot$ u G jest asocijativno

NEUTRALNI ELEMENT

Za proizvoljan $x\in G$ $(x=x_1+y_1\sqrt{2})$ neutralni element je $1\in G$

$(1=1+0\cdot\sqrt{2})$ $\quad 1\cdot x=x\cdot 1=x$

INVERZNI ELEMENT

$a\in G \Rightarrow a=a_1+a_2\sqrt{2}$

$a\cdot a'=a'\cdot a=1$

$(a_1+a_2\sqrt{2})(a_1+a_2\sqrt{2})'=1 \Rightarrow a'=\frac{1}{a_1+a_2\sqrt{2}}=\ldots$ ZAVRŠITI ZA VJEŽBU

Za proizvoljan $a\in G$ inverzni element je $a'=\frac{a_1}{a_1^2-2a_2^2}+\frac{-a_2}{a_1^2-2a_2^2}\sqrt{2}\in G$

Zaključak: $(G,\cdot)$ je grupa

(#) Skup G čine f-je

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$, $f_3(x)=\frac{x-1}{x}$, $f_4(x)=\frac{1}{x}$, $f_5(x)=1-x$

$f_6(x)=\frac{x}{x-1}$.

a) Napraviti Kajlijevu tablicu za operaciju $\circ$ (kompozicija f-ja) na skupu G

b) Provjeriti da li je struktura $(G,\circ)$ grupa.

Rj: a) Napišimo sve kompozicije

$f_1\circ f_1(x)=f_1(x)=x=f_1(x)$

$f_1\circ f_2(x)=f_1\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}=f_2(x)$

$f_1\circ f_3(x)=f_1\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}=f_3(x)$

$f_2\circ f_2(x)=f_2\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}=f_3(x)$

$f_2\circ f_3(x)=f_2\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=x=f_1(x)$

$f_2\circ f_4(x)=f_2\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}=f_6(x)$

ZA VJEŽBU NAĆI SVE OSTALE KOMPOZICIJE

Kajlijeva tablica

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

b) zatvorenost $\forall(f_a,f_b\in G)\ f_a\circ f_b\in G$ (tablica)

asocijativnost $\forall(f_a,f_b,f_c\in G)\ (f_a\circ f_b)\circ f_c=f_a\circ(f_b\circ f_c)$ (iz osobina binarnih relacija)

neutralni element je f_1 jer $\forall(f_a\in G)\ f_1\circ f_a=f_a\circ f_1=f_a$

inverzni element - za f_1 je f_1 (jer $f_1\circ f_1=f_1\circ f_1=f_1$)
za f_2 je f_3 (jer $f_2\circ f_3=f_3\circ f_2=f_1$)
za f_3 je f_2,

za f_4 je f_4 za f_5 je f_5 i za f_6 je f_6 (ZAŠTO?) $\Rightarrow$

$(G,\circ)$ ima strukturu grupe

(#) Je li skup $U=\{X\in M_2(\mathbb{C}) \mid \det(X)=1\}$ uz standardno množenje matrica grupa? (Skup $M_2(\mathbb{C})$ je skup svih matrica formata 2×2 sa elementima iz skupa kompleksnih brojeva).

Rj: Za neki skup S u kojem je definisana neka operacija $\circ$ kažemo da je grupa ako za svaka dva elementa iz S ($\forall a,b\in S$) imamo $a\circ b\in S$; za $\forall c\in S$ $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$; $\forall a\in S\ \exists e\in S$ $a\circ e=e\circ a=a$; i $\forall a\in S\ \exists a^{-1}\in S$ $a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$.

Uzmimo tri proizvoljna elementa iz U, $A\in U$, $B\in U$ i $C\in U$.
Tada imamo $\det(A)=1$, $\det(B)=1$, $\det(C)=1$.

Ako je $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ i $C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$ tada

$\det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$, $\det B = b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=1$ i
$\det C = c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}$.

Provjerimo da li skup U zadovoljava četiri navedena uslova.

a) zatvorenost $\forall A,B\in U$ $A\cdot B\in U$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}$$

Da li je $A\cdot B\in U$. Izračunajmo $\det(AB)$.

$$\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{vmatrix}=\cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}}+a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}$$
$$+a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}+\cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}-\cancel{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}}-a_{11}a_{22}b_{12}b_{21}-a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$
$$-\cancel{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}=a_{11}a_{22}\underbrace{(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}_{=1}-a_{12}a_{21}\underbrace{(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}_{=1}=1$$

Prema tome $A\cdot B\in U$. U je zatvoren.

b) asocijativnost $\forall A,B,C\in U$ $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
Od ranije znamo da je množenje matrica asocijativno. Ovaj korak možete uraditi za vježbu

c) jedinični element $\forall A\in U\ \exists I\in U$ $A\cdot I=I\cdot A=A$

Jedinični element za množenje matrica je $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

Da li je $I\in U$ $\det I=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $I\in U$ postoji jedinični element

d) inverzni element $\forall A\in U\ \exists A^{-1}\in U$ t.d. $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Inverzni element za matricu je $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{adj}$

$A_{adj}=A_{kof}^{T}$ Tad znamo da je $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Provjerimo da li je $A^{-1}\in U$

$\det A=1$ Pronađimo kofaktore

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ $A_{11}=(-1)^2\cdot a_{22}=a_{22}$ $A_{21}=(-1)^3\cdot a_{12}=-a_{12}$
$A_{12}=(-1)^3\cdot a_{21}=-a_{21}$ $A_{22}=(-1)^4\cdot a_{11}=a_{11}$

$A_{kof}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{bmatrix}$ $A_{adj}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$ $\det A^{-1}=\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$

$A^{-1}\in U$ tj. svaka matrica ima neutralni element.

Skup U uz standardno množenje matrica jest grupa.

(#) Neka je M skup matrica oblika $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$.
Koji uslov moraju zadovoljavati a, b i c da bi matrice iz M bile regularne? Za tako određeno a, b i c dokazati da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe. Da li je grupa Abelova?

Rj:
Za matricu A kažemo da je regularna ako je $\det A\neq 0$.

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{I_k+III_k} \begin{vmatrix} a+b & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ a+b & 0 & a \end{vmatrix} \xlongequal{I_v-III_v}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a \\ 0 & c & 0 \\ a+b & 0 & a \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} 0 & c \\ a+b & 0 \end{vmatrix}=(a-b)(a+b)c$$

Da bi matrice iz skupa M bile regularne potrebno je i dovoljno da je $a\neq\pm b$ i $c\neq 0$.
Za $a\neq\pm b$ i $c\neq 0$ pokažimo da skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.

(a) zatvorenost: $\forall A,B\in M\ \ A\cdot B\in M$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & 0 & a_1b_2+a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1+a_1b_2 & 0 & b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}$$

Kako je $c_1\neq 0$ i $c_2\neq 0 \Rightarrow c_1c_2\neq 0$.
Da bi matrica $\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & 0 & a_1b_2+a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1+a_1b_2 & 0 & b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}$ bila u skupu M potrebno je još da je $a_1a_2+b_1b_2\neq\pm(a_2b_1+a_1b_2)$ tj. $a_1a_2+b_1b_2\neq a_2b_1+a_1b_2$ i $a_1a_2+b_1b_2\neq -a_2b_1-a_1b_2$.

$a_1a_2+b_1b_2\neq a_2b_1+a_1b_2$
$a_1a_2-a_1b_2\neq a_2b_1+b_1b_2$
$a_1(a_2-b_2)\neq b_1(a_2-b_2)$
$a_1(a_2-b_2)-b_1(a_2-b_2)\neq 0$
$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\neq 0$
Ovo je tačno za sve $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ zato što je $a_1\neq\pm b_1$ i $a_2\neq\pm b_2$.

$a_1a_2+b_1b_2\neq -a_2b_1-a_1b_2$
$a_1a_2+a_1b_2+b_1b_2+a_2b_1\neq 0$
$a_1(a_2+b_2)+b_1(a_2+b_2)\neq 0$
$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\neq 0$
Ovo je tačno za sve $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ zato što je $a_1\neq\pm b_1$ i $a_2\neq\pm b_2$.

Prema tome skup M je zatvoren u odnosu na operaciju množenja.

(b) asocijativnost $\forall A,B,C\in M\ \ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2+b_1b_2 & 0 & a_1b_2+a_2b_1 \\ 0 & c_1c_2 & 0 \\ a_2b_1+a_1b_2 & 0 & b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2a_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3+a_2b_1b_3 & 0 & a_1a_2b_3+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1 \\ 0 & c_1c_2c_3 & 0 \\ a_2a_3b_1+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_1a_2b_3 & 0 & a_2b_1b_3+a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_1a_2a_3 \end{bmatrix} \quad \ldots(*)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 & 0 & b_3 \\ 0 & c_3 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & c_1 & 0 \\ b_1 & 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2a_3+b_2b_3 & 0 & a_2b_3+a_3b_2 \\ 0 & c_2c_3 & 0 \\ a_3b_2+a_2b_3 & 0 & b_2b_3+a_2a_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2a_3+a_1b_2b_3+a_3b_1b_2+a_2b_1b_3 & 0 & a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+b_1b_2b_3+a_2a_3b_1 \\ 0 & c_1c_2c_3 & 0 \\ a_2a_3b_1+b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_1a_2b_3 & 0 & a_2b_1b_3+a_3b_1b_2+a_1b_2b_3+a_1a_2a_3 \end{bmatrix} \quad \ldots(**)$$

$(*)=(**)$ vrijedi zakon asocijativnosti

(c) neutralni element $\forall A\in M\ \exists J\in M\ \ A\cdot J=J\cdot A=A$, $J=\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$ odredimo J

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$$

$ax+by=a \Rightarrow x=1\ \ y=0$
$bx+ay=b \Rightarrow x=1\ \ y=0$
$cz=c \Rightarrow z=1$

$J=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad x\neq\pm y,\ z\neq 0 \quad J\in M$

Neutralni element je jedinična matrica

(d) inverzni element $\forall A\in M\ \exists A^{-1}\in M\ \ A\cdot A^{-1}=I$ $\quad A^{-1}=\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}$

Kako je matrica A regularna to postoji inverzna matrica.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z & 0 \\ y & 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{a}{a^2-b^2},\ y=\frac{-b}{a^2-b^2},\ z=\frac{1}{c}$$

Kako je $z\neq 0$ i $x\neq\pm y$ to $\exists$ inverzni element
Prema tome skup M u odnosu na operaciju množenja ima strukturu grupe.
Da li je grupa Abelova?
(e) komutativnost $\forall A,B\in M\ \ A\cdot B=B\cdot A$
PROVJERITI SAMI $\quad$ Grupa jest Abelova.

Prsten, tijelo i polje

Definicija Uređenu trojku $(P,*,\circ)$ nepraznog skupa P i dvije binarne operacije $*$, $\circ$ definisane u P nazivamo prsten akko vrijedi

a) $(P,*)$ je Abelova grupa;

b) $(P,\circ)$ je polugrupa;

c) Operacija $\circ$ je distributivna u odnosu na operaciju $*$ tj. vrijedi $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$ i $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$ za $\forall x,y,z\in P$.

Napomenimo da se u prstenu $(P,*,\circ)$ prva operacija $*$ često označava simbolom $+$ i naziva sabiranje u prstenu, a druga operacija $\circ$ se često označava sa $\cdot$ i naziva množenje u prstenu. U tom slučaju pišemo $(P,+,\cdot)$ umjesto $(P,*,\circ)$; Neutralni element Abelove grupe $(P,+)$ označavamo sa 0 i nazivamo nula prstena, a neutralni element (ako ga ima!) polugrupe $(P,\cdot)$ označavamo sa 1 i nazivamo jedinica prstena $(P,+,\cdot)$.

Definicija Prsten $(P,+,\cdot)$ sa jedinicom $e\neq 0$ nazivamo tijelo akko je $(P\setminus\{0\},\cdot)$ grupa.

Komutativno tijelo nazivamo polje.

(#) Provjeriti da u prstenu $(P,+,\cdot)$ važi
$$(\forall x,y\in P)\ -(x+y)=(-x)+(-y)=-x-y.$$

Rj. Podsjetimo se $(P,+,\cdot)$ je prsten akko važi

a) $(P,+)$ Abelova grupa

b) $(P,\cdot)$ polugrupa

c) $\forall(x,y,z\in P)\quad x\cdot(y+z)=xy+xz \ ;\ (x+y)\cdot z=xz+yz.$

$-(x+y)$ je isti zapis kao $(-1)(x+y)$

Iz osobine c) prstena $(-1)(x+y)=(-1)\cdot x+(-1)\cdot y=-x+(-y)$

Sad imamo
$$-(x+y)=(-1)(x+y)=(-1)x+(-1)y=-x+(-y)=-x-y$$
q.e.d.

(#) Dokazati da u prstenu važe zakoni

a) $x\cdot 0=0\cdot x=0$, gdje je 0 neutralni element za operaciju $+$;

b) $-(x\cdot y)=(-x)\cdot y=x\cdot(-y)$;

c) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$

Rj. a) $x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$

$x\cdot 0=x\cdot 0+x\cdot 0$

$0=x\cdot 0$ q.e.d. Analogno za $0\cdot x$ (URADITI ZA VJEŽBU).

b) Pokažimo jednakost $(-x)\cdot y=-(x\cdot y)$.

$x\cdot y+(-x)\cdot y=(x+(-x))y=0\cdot y=0$

$x\cdot y+(-x)\cdot y=0$

$-(x\cdot y)=(-x)\cdot y$ q.e.d. Dokaz druge jednakosti je sličan. (ZA VJEŽBU)

c) Na osnovu b) je

$(-x)\cdot(-y)=-(x\cdot(-y))=-(-(x\cdot y))=x\cdot y$ q.e.d.

Neka je $(P,+,\cdot)$ algebarska struktura koja zadovoljava sve aksiome prstena izuzev komutativnosti sabiranja. Ako P ima desnu jedinicu, dokazati da je $(P,+,\cdot)$ prsten.

Rj: Iz postavke zadatka imamo sljedeće:

a) $(P,+)$ je grupa

b) $(P,\cdot)$ je polugrupa i
P ima desnu jedinicu tj. $\forall (x \in P)\ x \cdot 1 = x$.

c) $\forall (x,y,z \in P)\quad x\cdot(y+z) = xy + xz \quad i \quad (x+y)\cdot z = xz + yz$

Šta trebamo dokazati?
Trebamo pokazati da je $(P,+,\cdot)$ prsten tj. da je operacija $+$ komutativna. Drugim riječima $\forall (a,b \in P)\ a+b = b+a$.

$\forall (a,b\in P)\quad b\cdot 1 = b$. Na osnovu prethodnog zadatka

$$-(b\cdot 1) = (-b)\cdot 1 = b\cdot(-1)$$ Pokažimo da $a+b = -((b+a)(-1))$

$$0 = (-b)+(-a)+a+b = b(-1)+a(-1)+a+b = (b+a)(-1)+a+b$$

$$\Rightarrow \quad a+b = -((b+a)(-1)) \quad \dots(1)$$

Pokažimo da je $b+a = -((b+a)(-1))$

$$0 = (-b)+(-a)+b+a = b(-1)+a(-1)+b+a = (b+a)(-1)+b+a$$

$$\Rightarrow \quad b+a = -((b+a)(-1)) \quad \dots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $a+b = b+a$ tj. važi komutativnost operacije $+$

$(P,+,\cdot)$ jest prsten

Neka su $a \oplus b = a+b-1$ i $a \circledast b = \frac{-ab}{2}$ binarne operacije na skupu $\mathbb{R}$. Ispitati da li $(\mathbb{R},\oplus,\circledast)$ ima strukturu prstena.

Rj: $(\mathbb{R},\oplus,\circledast)$ je prsten akko je

a) $(\mathbb{R},\oplus)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{R},\circledast)$ polugrupa

c) važe dva zakona distribucije $a\circledast(b\oplus c) = (a\circledast b)\oplus(a\circledast c)$
i $(a\oplus b)\circledast c = (a\circledast c)\oplus(b\circledast c)$

a) Provjerimo da li je $(\mathbb{R},\oplus)$ Abelova grupa.

zatvorenost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\oplus b\in\mathbb{R}$

$a\oplus b = a+b-1 \in \mathbb{R}$ operacija $\oplus$ jest zatvorena

asocijativnost $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad (a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)$

$$\left.\begin{aligned}(a\oplus b)\oplus c &= (a\oplus b)+c-1 = (a+b-1)+c-1 = a+b+c-2\\ a\oplus(b\oplus c) &= a+(b\oplus c)-1 = a+(b+c-1)-1 = a+b+c-2\end{aligned}\right\}\ \text{operacija } \oplus \text{ jest asocijativna}$$

neutralni element $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists e\in\mathbb{R}\quad a\oplus e = e\oplus a = a$

$$\left.\begin{aligned}a\oplus e &= a+e-1\\ e\oplus a &= e+a-1\end{aligned}\right\}\ \text{Da bi dobili } a\oplus e = a \text{ e mora biti } 1$$
1 je neutralni element

inverzni element $\forall a\in\mathbb{R}\ \exists a^{-1}\in\mathbb{R}\quad a\oplus a^{-1} = a^{-1}\oplus a = 1$

$a\oplus a^{-1} = 1 \Rightarrow a+a^{-1}-1 = 1$
$a^{-1} = 2-a$

inverzni element je $2-a$

$a\oplus(2-a) = a+(2-a)-1 = 1$
$(2-a)\oplus a = 2-a+a-1 = 1$

komutativnost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\oplus b = b\oplus a$

$$\left.\begin{aligned}a\oplus b &= a+b-1\\ b\oplus a &= b+a-1\end{aligned}\right\}\ \text{operacija } \oplus \text{ jest komutativna}$$

$(\mathbb{R},\oplus)$ jest Abelova grupa

b) Provjerimo da li je $(\mathbb{R},\circledast)$ polugrupa.

zatvorenost $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a\circledast b\in\mathbb{R}$

$a\circledast b = -\frac{ab}{2}\in\mathbb{R}$ operacija $\circledast$ jest zatvorena

asocijativnost $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad (a\circledast b)\circledast c = a\circledast(b\circledast c)$

$$(a\circledast b)\circledast c = -\frac{(a\circledast b)\cdot c}{2} = -\frac{-\frac{ab}{2}\cdot c}{2} = \frac{abc}{4} \quad \dots(1)$$

$$a\otimes(b\otimes c) = -\frac{a(b\otimes c)}{2} = -\frac{a(-\frac{bc}{2})}{2} = \frac{abc}{4} \quad \dots(2)$$

Iz (1) i (2) vidimo da je operacija $\otimes$ asocijativna

Prema tome $(R,\otimes)$ jest polugrupa.

c) Provjerimo da li važe dva zakona distribucije $\forall a,b,c\in R$

$$a\otimes(b\oplus c) = (a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$$
$$(a\oplus b)\otimes c = (a\otimes b)\oplus(b\otimes c)$$

i)
$$a\otimes(b\oplus c) = -\frac{a(b\oplus c)}{2} = -\frac{a(b+c-1)}{2} = -\frac{ab+ac-a}{2}$$
$$(a\otimes b)\oplus(a\otimes c) = (a\otimes b)+(a\otimes c)-1 = -\frac{ab}{2}+\left(-\frac{ac}{2}\right)-1 = \frac{-ab-ac-2}{2} = -\frac{ab+ac-2}{2}$$

Operacija $\otimes$ nije distributivna u odnosu na operaciju $\oplus$

$(R,\oplus,\otimes)$ nema strukturu prstena.

(#) U skupu racionalnih brojeva Q definisane su operacije Δ (trokutić) i $\square$ (kvadratić) na sljedeći način $x\Delta y = x+y+1$, $x\square y = xy+x+y$. Dokazati da je $(Q,\Delta,\square)$ prsten.

Rj. Trebamo pokazati

a) da je (Q,Δ) Abelova grupa

b) da je $(Q,\square)$ polugrupa

c) da vrijedi $\forall x,y,z\in Q$ $x\square(y\Delta z)=(x\square y)\Delta(x\square z)$

i $(x\Delta y)\square z = (x\square z)\Delta(y\square z)$

a) ZATVORENOST

$\forall(x,y\in Q) \Rightarrow x\Delta y = x+y+1\in Q \Rightarrow x\Delta y\in Q$

operacija Δ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$\forall(x,y,z\in Q)$ $(x\Delta y)\Delta z = (x+y+1)\Delta z = (x+y+1)+z+1 = x+(y+z+1)+1$
$= x\Delta(y+z+1) = x\Delta(y\Delta z)$

operacija Δ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(x\in Q)\ \exists(e\in Q)$ $x\Delta e = x$

$x+e+1=x$

$e+1=0$

$e=-1$

Neutralni element je -1.

$(-1)\Delta x = -1+x+1 = x$

INVERZNI ELEMENT

$\forall(x\in Q)\ \exists(x^*\in Q)$ $x\Delta x^* = -1$

$x+x^*+1=-1$

$x^* = -x-2$

Inverzni element elementa x je $-x-2$

$(-x-2)\Delta x =$
$= -x-2+x+1 = -1$

KOMUTATIVNOST

$\forall(x,y\in Q)$ $x\Delta y = x+y+1 = y+x+1 = y\Delta x$

operacija Δ je komutativna

(Q,Δ) jest Abelova grupa.

b) ZATVORENOST

$\forall(x,y\in\mathbb{Q})\quad x\,\square\, y = xy+x+y\in\mathbb{Q} \Rightarrow x\,\square\, y\in\mathbb{Q}$ operacija $\square$ je zatvorena

ASOCIJATIVNOST

$\forall(x,y,z\in\mathbb{Q})\quad (x\,\square\, y)\,\square\, z=(xy+x+y)\,\square\, z = (xy+x+y)z+xy+x+y+z =$

$= xyz+xz+yz+xy+x+y+z \quad \dots(1)$

$x\,\square\,(y\,\square\, z) = x\,\square\,(yz+y+z) = x(yz+y+z)+x+yz+y+z =$

$= xyz+xy+xz+yz+x+y+z \quad \dots(2)$

(1) i $(2) \Rightarrow (x\,\square\, y)\,\square\, z = x\,\square\,(y\,\square\, z)$ operacija $\square$ je asocijativna

$(\mathbb{Q},\square)$ jest polugrupa

c) $x\,\square\,(y\,\Delta\, z) = x\,\square\,(y+z+1) = x(y+z+1)+x+y+z+1 = xy+xz+2x+y+z+1 \quad \dots(I)$

$(x\,\square\, y)\,\Delta\,(x\,\square\, z) = (xy+x+y)\,\Delta\,(xz+x+z) = xy+xz+2x+y+z+1 \quad \dots(II)$

(I) i $(II) \Rightarrow x\,\square\,(y\,\Delta\, z) = (x\,\square\, y)\,\Delta\,(x\,\square\, z)$

$$\left.\begin{array}{l}(x\,\Delta\, y)\,\square\, z = (x+y+1)\,\square\, z = (x+y+1)z+x+y+1+z = xz+yz+x+y+2z+1\\ (x\,\square\, z)\,\Delta\,(y\,\square\, z) = (xz+x+z)\,\Delta\,(yz+y+z) = xz+yz+x+y+2z+1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow (x\,\Delta\, y)\,\square\, z = (x\,\square\, z)\,\Delta\,(y\,\square\, z)$

vrijede dva zakona distribucije

Kako vrijedi a), b), c) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Uređena trojka $(\mathbb{Q},\Delta,\square)$ jest prsten

q.e.d.

Ispitati da li $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ polje, gdje su operacije $+$ i $\cdot$ date sa

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,\ y+v)$$
$$(x,y)\cdot(u,v)=(xu-2yv,\ xv+yu)$$

Rj: Trebamo provjeriti da li je

a) $(\mathbb{R}^2,+)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{R}^2\setminus e_+,\cdot)$ Abelova grupa (gdje je e_+ neutralni element operacije sabiranja) $(e_+=(e_1,e_2))$

c) da važe dva zakona distributivnosti

a) ZATVORENOST

$\forall((x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2)\quad (x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)\in\mathbb{R}^2$ Operacija $+$ je zatvorena u $\mathbb{R}^2$

ASOCIJATIVNOST

$\forall((x,y),(u,v),(s,t)\in\mathbb{R}^2)\quad ((x,y)+(u,v))+(s,t) = (x+u,y+v)+(s,t) =$

$=((x+u)+s,\ (y+v)+t) = (x+(u+s),\ y+(v+t)) = (x,y)+(u+s,v+t) =$

$=(x,y)+((u,v)+(s,t)) \Rightarrow$ operacija $+$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \exists(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y)+(e_1,e_2)=(x,y)$

$(x+e_1,y+e_2)=(x,y)$

$(e_1,e_2)=(0,0)$

Neutralni element je $(0,0)$ za svako $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

INVERZNI ELEMENT

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \exists(x^*,y^*)\in\mathbb{R}^2$

$(x,y)+(x^*,y^*)=(0,0)$

$(x+x^*,y+y^*)=(0,0)$

$(x^*,y^*)=(-x,-y)$

Inverzni element elementa (x,y) je $(-x,-y)$.

KOMUTATIVNOST

$\forall((x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2)\quad (x,y)+(u,v)=(x+u,\ y+v)=(u+x,\ v+y)=(u,v)+(x,y)$

Operacija $+$ je komutativna $\Rightarrow (\mathbb{R}^2,+)$ je Abelova grupa.

b) Proverimo da li je $(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\cdot)$ Abelova grupa.

ZATVORENOST

Da li je $\forall (x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ $(x,y)\cdot(u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

Pretpostavimo da $(x,y)\cdot(u,v)=(xu-2yv,\ xv+yu)$ nije element $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Tada bi važilo

$$\begin{aligned} xu-2yv&=0 \quad /\cdot(-v)\\ xv+yu&=0 \quad /\cdot u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -xuv+2yv^2&=0\\ +\quad xuv+yu^2&=0 \end{aligned}$$

$$2yv^2+yu^2=0 \Rightarrow y(2v^2+u^2)=0$$

$$\Rightarrow y=0 \text{ ili } 2v^2+u^2=0$$

$$\begin{aligned} xu-2yv&=0 \quad /\cdot x\\ xv+yu&=0 \quad /\cdot 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2u-2xyv&=0\\ +\ 2xyv+2y^2u&=0 \end{aligned}$$

$$x^2u+2y^2u=0$$

$$(x^2+2y^2)u=0$$

$$u=0 \text{ ili } x^2+2y^2=0$$

1° $y=0 \Rightarrow x=0$ ili $u=v=0$
#što nije moguće

2° $2v^2+u^2=0 \Rightarrow u=v=0$
#što je nemoguće zbog uslova $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Skup $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ je zatvoren u odnosu na operaciju $\cdot$.

ASOCIJATIVNOST

$\forall((x,y),(u,v),(s,t)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ $((x,y)\cdot(u,v))\cdot(s,t)=(xu-2yv,\ xv+yu)\cdot(s,t)=$

$$=((xu-2yv)\cdot s-2(xv+yu)\cdot t,\ (xu-2yv)\cdot t+(xv+yu)\cdot s)$$

$$=(xus-2yvs-2xvt-2yut,\ xut-2yvt+xvs+yus) \quad \ldots(1)$$

$((x,y)\cdot((u,v)\cdot(s,t)))=$ za vježbu $\ldots=(xus-2yvs-2xvt-2yut,\ xut-2yvt+xvs+yus)\ \ldots(2)$

$(1)=(2) \Rightarrow$ struktura jest asocijativna.

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\ \exists(e_1,e_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\ (x,y)\cdot(e_1,e_2)=(x,y) \Rightarrow (xe_1-2ye_2,\ xe_2+ye_1)=(x,y)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} xe_1-2ye_2&=x\\ xe_2+ye_1&=y \end{aligned}$$

$$x(e_1-1)-2ye_2=0$$

$$x\cdot e_2+y(e_1-1)=0$$

$\Rightarrow e_1=1$ i $e_2=0$. Prema tome jedinični element je $(1,0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

INVERZNI ELEMENT

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\ \exists(x^*,y^*)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\quad (x,y)\cdot(x^*,y^*)=(1,0)$

$$(xx^*-2yy^*,\ xy^*+yx^*)=(1,0)$$

$$\begin{aligned} xx^*-2yy^*&=1 \quad /\cdot x\\ xy^*+yx^*&=0 \quad /\cdot 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2x^*-2xyy^*&=x\\ +\ 2xyy^*+2y^2x^*&=0 \end{aligned}$$

$$x^2x^*+2y^2x^*=x$$

$$(x^2+2y^2)x^*=x$$

$$x^*=\frac{x}{x^2+2y^2}$$

slično (za vježbu)

$$y^*=\frac{-y}{x^2+2y^2}$$

$(x^2+2y^2\neq 0) \rightarrow$ ZAŠTO?

Inverzni element elementa (x,y) je $(x,y)^{-1}=(x^*,y^*)=\left(\frac{x}{x^2+2y^2},-\frac{y}{x^2+2y^2}\right)$

c) Operacija $\cdot$ distributivna je prema $+$ jer je

$$(x,y)\cdot((u,v)+(s,t))=(x,y)\cdot(u+s,v+t)=(x(u+s)-2y(v+t),$$

$$x(v+t)+y(u+s))=(xu+xs-2yv-2t,\ xv+xt+yu+ys)=$$

$$=(xu-2yv,\ xv+yu)+(xs-2yt,\ xt+ys)=(x,y)\cdot(u,v)+(x,y)\cdot(s,t)$$

a), b), c) $\Rightarrow$ Struktura $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ je polje
q.e.d.

Pokazati za vježbu da je

$$((x,y)+(u,v))\cdot(s,t)=(x,y)\cdot(s,t)+(u,v)\cdot(s,t).$$

(#) U skupu $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$ date su operacije $+_5$ (sabiranje po modulu 5) i $\cdot_5$ (množenje po modulu 5). Dokazati da je struktura $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ polje.

$$\boxed{a +_5 b = c;\quad c=\begin{cases} a+b, & a+b<5\\ a+b-5, & a+b\ge 5\end{cases}}$$

Rj. Trebamo pokazati da je

a) $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ Abelova grupa

b) $(\mathbb{Z}_5\setminus e_+)$ Abelova grupa (gdje je e_+ neutralni element za operaciju $+_5$)

c) da je $\cdot_5$ distributivno u odnosu na $+_5$.

$$\boxed{a\cdot_5 b = c \text{ gdje je } a\cdot b = q\cdot 5 + c,\ 0\le c<5}$$

Kako je $\mathbb{Z}_5$ konačan skup to sabiranje i množenje po modulu 5 možemo predstaviti u obliku tabela

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

a) ZATVORENOST

$\forall(a,b\in\mathbb{Z}^+)\ a+_5 b = c\in\mathbb{Z}^5$ (vidimo iz tabele $+_5$)

ASOCIJATIVNOST

$\forall(a,b,c\in\mathbb{Z}^+)\ (a+_5 b)+_5 c = d+_5 c$ gdje je $d\stackrel{def}{=}\begin{cases}a+b, & a+b<5\\ a+b-5, & a+b\ge5\end{cases}$

$$\Rightarrow d+_5 c = \begin{cases} d+c, & d+c<5\\ d+c-5, & d+c\ge5\end{cases} = \begin{cases}(a+b)+c, & (a+b)+c<5\\ (a+b)+c-5, & 5\le(a+b)+c<10\\ (a+b)+c-10, & 10\le (a+b)+c\end{cases} \quad \ldots(*)$$

$a+_5(b+_5c) = a+_5 f$, gdje je $f\stackrel{def}{=}\begin{cases}b+c, & b+c<5\\ b+c-5, & b+c\ge5\end{cases}$

$$a+_5 f \stackrel{def.}{=} \begin{cases}a+f, & a+f<5\\ a+f-5, & a+f\ge5\end{cases} = \begin{cases} a+(b+c), & a+(b+c)<5\\ a+(b+c)-5, & 5\le a+(b+c)\\ a+(b+c)-10, & 10\le a+(b+c)\end{cases} \quad \ldots(**)$$

Iz (*) i (**) $\Rightarrow$ operacija $+_5$ je asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(a\in\mathbb{Z}_5)\ \exists(e_+\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 e_+ = a$

$e_+=0$ (ovo možemo vidjeti iz definicije ili iz tabele)

Neutralni element za operaciju $+_5$ je 0.

INVERZNI ELEMENT

$\forall(a\in\mathbb{Z}_5)\ \exists(a^*\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 a^* = 0$

Iz tabele inverzni elementi su: za 0 0, za 1 4, za 2 3, za 3 2, za 4 1.

Svaki element ima inverzni element

KOMUTATIVNOST

$\forall(a,b\in\mathbb{Z}_5)\ a+_5 b = \begin{cases}a+b, & a+b<5\\ a+b-5, & a+b\ge5\end{cases} \ldots(*),\quad b+_5 a = \begin{cases}b+a, & b+a<5\\ b+a-5, & b+a\ge5\end{cases} \ldots(**)$

(*) i (**) $\Rightarrow a+_5 b = b+_5 a$

Prema tome $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ je Abelova grupa

b) Pokažimo da je $(\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}, \cdot_5)$ Abelova grupa

ZATVORENOST

Prema teoremi o djeljenju za broj $a\cdot b$ postoji jednoznačno određen broj q tako da je $a\cdot b = 5\cdot q + r,\ 0\le r<5$

$\forall(a,b\in\ )\ a\cdot b = r$ gdje je r dobijeno iz $a\cdot b = 5\cdot q+r$

$\Rightarrow r\in\mathbb{Z}_5 \Rightarrow a\cdot b\in\mathbb{Z}_5$ Operacija $\cdot_5$ je zatvorena.

ASOCIJATIVNOST, NEUTRALNI ELEMENT, INVERZNI ELEMENT i KOMUTATIVNOST za $\cdot_5$ uraditi za vežbu.

c) $\forall(a,b,c\in\mathbb{Z}_5)$

$a\cdot_5(b+_5c) = a\cdot_5 d$, $\ldots(1)$ gdje je $d=\begin{cases}b+c, & b+c<5\\ b+c-5, & b+c\ge5\end{cases}$

$(a\cdot_5 b)+_5(a\cdot_5 c) = r_1+_5 r_2$, $\ldots(2)$ gdje je $r_1 = a\cdot b-5q_1,\ r_2=a\cdot c-5q_2,\ 0\le r_1<5,\ 0\le r_2<5$

KAKO NAĆI VEZU IZMEĐU (1) i (2). POKUŠATI RIJEŠITI ZA VJEŽBU.

a), b), c) $\Rightarrow (\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$ jest polje q.e.d.

(Zadaci su skinuti sa stranice: \pf.unze.ba\nabokov
Za uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Zadaci za vježbu

1. U skupu $\mathbb{Z}^2$ date su operacije $*$ i $\circ$ na sljedeći način: $(m,n)*(p,q)=(m+p,\ n+q)$
$(m,n)\circ(p,q)=(mp+nq,\ mq+np)$
Dokazati da je $(\mathbb{Z}^2,*,\circ)$ prsten.

2. a) Dat je skup $S=\{1,-1,i,-i\}$. Ispitati da li su $(S,+)$ i $(S,\cdot)$ grupoidi.
b) Data su preslikavanja $f_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Ispitati koju algebarsku strukturu predstavlja par $(A,\circ)$ gdje je $A=\{f_1,f_2,f_3\}$ a „$\circ$" operacija kompozicije f-ja $((f\circ g)(x)=f(g(x)))$.

3. Binarne operacije $*$ i $\circ$ definisane su na skupu $\mathbb{R}^2$ sa: $(a,b)*(c,d)=(a+c,\ b+d)$ i $(a,b)\circ(c,d)=(ac,\ ad+bc)$
Dokazati da je $(\mathbb{R}^2,*,\circ)$ komutativni prsten sa jedinicom.

4. Dat je skup od 4 realne f-je $S=\{f_1(x)=x,\ f_2(x)=\frac{1}{x},\ f_3(x)=-x,\ f_4(x)=-\frac{1}{x}\}$ i u skupu S operacija $\circ$ slaganja f-ja. Da li je struktura $(S,\circ)$ grupa?

5. Na skupu $\mathbb{R}$ definisana je operacija $*$ na sljedeći način $x*y=xy+x+y$. Da li je struktura $(\mathbb{R},*)$ grupa? Ako nije, za koji element $a\in\mathbb{R}$ će struktura $(\mathbb{R}\setminus\{a\},*)$ biti grupa?

6. Dat je skup $S=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0\}$ i u njemu operacija $*$ definisana sa $(a,b)*(c,d)=(ac,\ bc+c+d)$. Ispitati da li je struktura $(S,*)$ grupa.

OPERACIJA I ALGEBARSKE STRUKTURE

23. Neka je $S \neq \emptyset$. Tada preslikavanje $f: S \times S \to S$ nazivamo *binarnom operacijom* f u S. Prema definiciji preslikavanja (vidi 14) izlazi:

$$(\forall a, b \in S)(\exists! c \in S) f(a, b) = c,$$

što zapisujemo u obliku $afb = c$, gdje je a *lijevi operand*, b *desni operand*, c *rezultat operacije* sa operatorom f. Skup S sa operacijom f nazivamo *grupoidom* i označavamo sa (S, f).

24. *Grupoid* $(S, \circ)$ naziva se *grupa* ako vrijede osobine:

1° *internost*: $(\forall a, b \in S)(\exists! c \in S)\, a \circ b = c$;

2° *asocijativnost*: $(\forall a, b, c \in S)\,(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

3° *egzistencija neutralnog ili jediničnog elementa*:

$$(\exists e \in S)(\forall a \in S)\, e \circ a = a = a \circ e$$

(e se naziva *neutralnim* ili *jediničnim elementom*);

4° egzistencija inverznog (simetričkog) elementa:

$$(\forall a \in S)(\exists \bar{a} \in S)\, a \circ \bar{a} = e = \bar{a} \circ a,$$

gdje je e *jedinični element* u S. Elemenat $\bar{a}$ (označava se sa a^{-1} ili $-a$) naziva se *inverznim* ili *simetričnim elementom* elementa a.
Ako pored osobina 1°–4° u grupi $(S, \circ)$ vrijedi:

5° komutativnost: $(\forall a, b \in S)\, a \circ b = b \circ a$, tada se kaže da je grupa *komutativna* ili *Abelova*.*

Neka je $(T, \circ)$ grupa i $T \subset S$, tada grupu $(T, \circ)$ nazivamo podgrupom grupe $(S, \circ)$.

---

* Nils Abel (1802–1829), norveški matematičar.

25. *Struktura* $(S, \circ, *)$ gdje su $\circ$ i $*$ dvije binarne interne operacije u S naziva se *prsten* ako je:

1° $(S, \circ)$ Abelova grupa;

2° operacija $*$ je asocijativna;

3° za sve $a, b, c \in S$ vrijedi

$$a*(b \circ c) = (a*b) \circ (a*c);$$

$$(b \circ c)*a = (b*a) \circ (c*a),$$

tj. lijeva i desna distributivnost operacije $*$ prema operaciji $\circ$.

26. Prsten $(S, \circ, *)$ je *tijelo* ako je $(S \setminus \{0\}, *)$ grupa, gdje je 0 neutralni element za operaciju $\circ$.

27. *Komutativno tijelo* je *polje*.
Uobičajene su oznake $(G, \cdot)$ za grupu, $(R, +, \cdot)$ za prsten, $(\Phi, +, \cdot)$ za tijelo, „0" je neutralni elemenat za adiciju $+$, „1" je neutralni elemenat za multiplikaciju.

28. *Vektorskim prostorom* ili *linearnim prostorom* nad tijelom $(\Phi, +, \cdot)$ nazivamo Abelovu grupu $X = \{x, y, \ldots\}$, u kojoj je definisano množenje s elementima iz Φ, tj.

$$(\forall x \in X)(\forall \alpha \in \Phi)\, \alpha x \in X.$$

Pri tome vrijedi:

1° $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; 2° $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$; 3° $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$; 4° $1x = x$ za sve elemente $\alpha, \beta \in \Phi$, $x, y \in X$. Sa 1 je označen neutralni element multiplikacije u polju Φ. Elemente iz X zovemo *vektorima*, elemente iz Φ *skalarima*, operaciju $+$ skupa X vektorsko sabiranje, operacija $(\alpha, x) \to \alpha x$ množenja vektora $x \in X$ skalarom $\alpha \in \Phi$.

29. Neka su $(A, \circ)$ i $(B, *)$ grupoidi. Ako postoji bijekcija (preslikavanje 1–1 i *na*) $f: A \to B$ tako da vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\, f(x \circ y) = f(x) * f(y),$$

kaže se da su grupoidi $(A, \circ)$ i $(B, *)$ *izomorfni*, a za preslikavanje f kaže se da je *izomorfizam* od A na B.
Ako je $A = B$, f se zove *automorfizam*.

ZADACI

12. Ispitati da li su slijedeće strukture grupe:

a) $S=\{1, -1, i, -i\}$ u odnosu na obično sabiranje;

b) isti skup u odnosu na množenje brojeva $(i^2=-1)$;

c) $S=\{f_i(x) | i=1, 2, 3, 4\}$, gdje je

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$, $f_4(x)=-\frac{1}{x}$ uz operaciju $f_i \circ f_j = f_i(f_j(x))$, $i, j=\overline{1, 4}$ (tj. $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$).

d) $(N, \cdot)$, $(Z, \cdot)$, $(Q, \cdot)$, $(R, \cdot)$; e) $(N, +)$, $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$;

f) $S=\left\{\frac{1+2m}{1+2n} \middle| m, n \in Z\right\}$ u odnosu na obično množenje;

g) $S=\left\{f: x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \middle| a, b, c, d, x \in R, ad-bc=1\right\}$;

$f(x) * g(x) = f(g(x))$;

h) $(R^+, *)$, $a*b=a^b$; i) $(R^+, \odot)$, $a \odot b = a^2 b^2$.

13. $S=\{f: X \to X | f \text{ je bijekcija}\}$ i

$(\forall f, g \in S) f(x) \circ g(x) = f(g(x))$. Dokazati da je $(S, \circ)$ grupa.

14. a) Neka je $nZ=\{n \cdot z | z \in Z\}$ $(n \in N)$. Ispitati da li je struktura $(nZ, +, \cdot)$ prsten, tijelo ili polje.

Isto pitanje važi i za strukture:

b) $(Q, +, \cdot)$, $(R, +, \cdot)$, $(C, +, \cdot)$; c) $(\{a+b\sqrt{2} | a, b \in Z\}, +, \cdot)$;

d) $(S, +, \cdot)$, gdje je S skup polinoma sa cijelim (realnim) koeficijentima.

15. Neka je $(G, \cdot)$ grupa. Dokazati da je:

a) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$; b) $(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; c) $xa=xb \Rightarrow a=b$;

d) $ax=bx \Rightarrow a=b$; e) $ax=b \Rightarrow x=a^{-1}b$; f) $xa=b \Rightarrow x=ba^{-1}$,

gdje su $a, b, x \in G$; $m, n \in Z$.

16. Dokazati da brojevi oblika $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, gdje $a, b, c \in Q$, obrazuju polje u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$.

Naći inverzni elemenat elementa $x=1-\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}$.

17. U prstenu $(Z, +, \cdot)$ definisane su operacije:

$a \oplus b :\overset{\text{Df}}{=} a+b+1$;

$a \odot b :\overset{\text{Df}}{=} ab+a+b$.

Pokazati da su $(Z, +, \cdot)$ i $(Z, \oplus, \odot)$ izomorfni prsteni.

18. Pokazati da je X vektorski prostor nad poljem Φ ako je:

a) $X=R$, $\Phi=R$ ili $X=R^n$, $\Phi=R$ $(n \in N)$ i vrijedi

$(\forall x, y \in R^n)\, x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \wedge \lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$,

$\lambda \in R$, $x=(x_1\ x_2, \ldots, x_n) \in R^n$.

b) $\Phi=C, X=C$, c) $X=C, \Phi=R$,

d) X je skup svih polinoma stepena $\leqq n$, $\Phi=R$.

19. Skup G čine funkcije

$f_1(x)=x$, $f_2(x)=1/x$, $f_3(x)=1-x$, $f_4(x)=1/(1-x)$, $f_5(x)=(x-1)/x$, $f_6(x)=x/(x-1)$,

a operacija $\circ$ definisana je kao u zadatku 12. c).

Napišite Kelijevu* tablicu kompozicije za grupoid $(G, \circ)$ i dokažite da je to grupa!

20. Neka je $P(S)$ partitivni skup skupa S i $\triangle$ simetrična razlika skupova. Dokazati da je $(P(S), \triangle)$ grupa.

21. Pokazati da su $(R, +)$, $(R^+, \cdot)$ grupe koje su izomorfne.

(Primjedba: $f: R \to R^+$ definisati sa $f(x)=2^x$.)

22. Dokazati da u komutativnoj grupi G vrijedi:

$(\forall a, b \in G)(\forall n \in Z)(ab)^n = a^n b^n$.

RJEŠENJA

12. a) Ne; b) da; c) da; d) $(N, \cdot)$, $(Z, \cdot)$ nisu, $(Q, \cdot)$ i $(R, \cdot)$ su grupe; e) $(N, +)$ nije grupa; f) da; g) da; h) ne; i) ne.

14. a), c) i d) prsten; b) polje.

15. a) Kako je

$$\begin{aligned}(a\cdot b)\cdot(b^{-1}a^{-1}) &= a(b\cdot b^{-1})a^{-1} && \text{(asocijativnost)}\\ &= a\cdot a^{-1} && (bb^{-1}=e)\\ &= e\end{aligned}$$

to je $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$;

b) dokaž indukcijom;

c) $xa=xb \Rightarrow x^{-1}(xa)=x^{-1}(xb) \Rightarrow a=b$, pošto je $x^{-1}x=e$ za svako $x\in G$;

e) $ax=b \Rightarrow a^{-1}(ax)=a^{-1}b \Rightarrow x=a^{-1}b$.

16. $x^{-1}=\frac{1}{43}(5+9\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})$.

17. Lako se provjerava da su $(Z, +, \cdot)$ i $(Z, \oplus, \odot)$ prsteni. Ako je $f: x\mapsto x-1$, $(x\in Z)$, tada nije teško provjeriti da je

$(\forall x, y\in Z)\ f(x+y)=f(x)\oplus f(y)$, $f(x\cdot y)=f(x)\odot f(y)$ (i da je f bijekcija), tj. dati prsteni su izomorfni.

19. Kelijeva tablica operacije $\circ$ je:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1.

Koristeći tu tablicu, lako se provjerava:

(*i*) operacija $\circ$ je interna, tj.

$(\forall i, j=\overline{1, 6})\ f_i\circ f_j=f_i(f_j(x))\in\{f_k \mid k=\overline{1, 6}\}$;

(*ii*) $f_i\circ f_1=f_1\circ f_i=f_i$ za svako $i=\overline{1, 6}$, tj.

f_1 je neutralni elemenat operacije $\circ$;

(*iii*) $f_i\circ f_i=f_1$, za $i=1, 2, 3, 6$, dok je $f_4\circ f_5=f_5\circ f_4=f_1$, tj. $f_i^{-1}=f_i$ za $i=1, 2, 3, 6$ dok je $f_4^{-1}=f_5$ i $f_5^{-1}=f_4$;

(*iv*) lako se provjerava asocijativnost, tako npr. $(f_2\circ f_3)\circ f_6=f_4\circ f_6=f_3$, $f_2\circ(f_3\circ f_6)=f_2\circ f_4=f_3$ itd.

Da li je ovo Abelova grupa?

Sistem linearnih jednačina

Sistem od m jednačina sa n nepoznatih zovemo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Sisteme linearnih jednačina možemo rješiti:

a) Gausovom metodom
b) Kramerovom metodom (metoda determinanti)
c) Matričnom metodom
d) Kroneker-Kapelijevom metodom

1. Gausovom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= -1 \quad (1) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \quad (2) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 9 \quad (3) \\ 5x_1 - 2x_2 + \underline{x_3} - 2x_4 &= 9 \quad (4) \end{aligned}$$

Rj.

$(1)+2\cdot(4)$: $11x_1 - 3x_2 = 17$
$(2)+(4)$: $8x_1 + x_4 = 9$
$(3)-3\cdot(4)$: $-13x_1 + 5x_2 + 5x_4 = -18$

$3x_2 = 11x_1 - 17 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(11x_1 - 17)$
$x_4 = -8x_1 + 9$
$-13x_1 + 5x_2 + 5x_4 = -18$

$-13x_1 + \frac{5}{3}(11x_1 - 17) + 5(-8x_1 + 9) = -18$
$-13x_1 + \frac{55}{3}x_1 - \frac{85}{3} - 40x_1 + 45 = -18$
$-53x_1 + \frac{55}{3}x_1 = -63 + \frac{85}{3} \quad / \cdot 3$
$-159x_1 + 55x_1 = -189 + 85$
$-104x_1 = -104$
$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{1}{3}(11x_1 - 17) = \frac{1}{3}(11 - 17) = -2$
$x_4 = -8x_1 + 9 = 1$

$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1$
$-2x_3 = -1 + 2 - 4 - 1$
$-2x_3 = -4$
$x_3 = 2$

Rješenje sistema je $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$

2. Gausovom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 6 \\ 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 9 \end{aligned}$$

#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Gausovom metodom:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \quad (a) \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \quad (b) \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \quad (c) \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \quad (d) \end{aligned}$$

(a): $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$
(b)+(a): $-x_2 + x_3 - x_4 = 1$
(c)−(a): $-x_2 + x_3 - x_4 = 1$
$-x_2 + x_3 - x_4 = 1$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Imamo dvije linearne jednačine sa četri nepoznate $\Rightarrow$ dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_3 = s$, $x_4 = t$

$x_2 = s - t - 1$

$2x_1 = 1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4$
$2x_1 = 1 + \underline{2s} \underline{\underline{-2t}} - 2 \underline{-2s} \underline{\underline{-3t}}$
$2x_1 = -5t - 1$
$x_1 = \frac{-5}{2}t - \frac{1}{2}$

Rješenje sistema linearnih jednačina je

$\left(\frac{-5}{2}t - \frac{1}{2},\ s - t - 1,\ s,\ t\right)$

<u>Cramerovo pravilo</u> (metoda determinanti)

Rješavamo sistem oblika $A\cdot x=b$ gdje je $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$. D_k determinanta koja se dobije od D ($D=\det A$) kada se umjesto k-te kolone u D stave slobodni članovi $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$.

a) za $D\neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$, $z=\frac{D_z}{D}$

b) za $D=0$; ($D_x\neq 0$ ili $D_y\neq 0$ ili $D_z\neq 0$) sistem nema nijedno rješenje

c) za $D=D_x=D_y=D_z$ ne možemo ništa zaključiti (sistem može imati ∞ mnogo rješenja ili nemati nijedno rješenje) (potrebna su dalja ispitivanja)

) Metodom determinanti riješiti sistem jednačina
$$2x-y-z=4$$
$$3x+4y-2z=11$$
$$3x-2y+4z=11.$$

Rj.
$$D=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&4&-2\\3&-2&4\end{vmatrix}\xlongequal[III_v+I_v\cdot 4]{II_v+I_v\cdot(-2)}\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&6&0\\11&-6&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-1&6\\11&-6\end{vmatrix}=-(6-66)=60$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\11&4&-2\\11&-2&4\end{vmatrix}\xlongequal[III_v+I_v\cdot 4]{II_v-I_v\cdot 2}\begin{vmatrix}4&-1&-1\\3&6&0\\27&-6&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}3&6\\27&-6\end{vmatrix}=-(-18-162)=180$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&11&-2\\3&11&4\end{vmatrix}\xlongequal[II_k+III_k\cdot 4]{I_k+III_k\cdot 2}\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&3&-2\\11&27&4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-1&3\\11&27\end{vmatrix}=-(-27-33)=60$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}\xlongequal[III_v-I_v\cdot 2]{II_v+I_v\cdot 4}\begin{vmatrix}2&-1&4\\11&0&27\\-1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&27\\-1&3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}11&9\\-1&1\end{vmatrix}=3(11+9)=60$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{180}{60}=3;\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{60}{60}=1;\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{60}{60}=1$$

Rješenje sistema je $x=3$, $y=1$ i $z=1$

)^v Metodom determinanti riješiti sistem jednačina:
$$2x+4y-5z=-5$$
$$-x-y+z=0$$
$$2x+y-z=1.$$

Rj. $x=1$, $y=2$, $z=3$

) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ:
$$(\lambda-2)x-3y+2z=1$$
$$3x-3y+(\lambda-3)z=1$$
$$x-y+2z=-1.$$

Rj.
$$D=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&2\\3&-3&\lambda-3\\1&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[III_k+II_k\cdot 2]{I_k+II_k}\begin{vmatrix}\lambda-5&-3&-4\\0&-3&\lambda-9\\0&-1&0\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}-3&\lambda-9\\-1&0\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-9)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&-3&2\\1&-3&\lambda-3\\-1&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[II_v+III_v]{I_v+III_v}\begin{vmatrix}0&-4&4\\0&-4&\lambda-1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-4&4\\-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(-1)(-4)\begin{vmatrix}1&4\\1&\lambda-1\end{vmatrix}=4(\lambda-5)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&2\\3&1&\lambda-3\\1&-1&2\end{vmatrix}\xlongequal[II_v+III_v]{I_v+III_v}\begin{vmatrix}\lambda-1&0&4\\4&0&\lambda-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&4\\4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4^2=(\lambda-1-4)(\lambda-1+4)=(\lambda-5)(\lambda+3)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3&1\\3&-3&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{I_k+II_k}\begin{vmatrix}\lambda-5&-3&1\\0&-3&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}-3&1\\-1&-1\end{vmatrix}=4(\lambda-5)$$

Diskusija

1° $\lambda\neq 5$ i $\lambda\neq 9$ ($D\neq 0$) Sistem ima jedinstveno rješenje
$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{4(\lambda-5)}{(\lambda-5)(\lambda-9)}=\frac{4}{\lambda-9},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\lambda+3}{\lambda-9},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{4}{\lambda-9}$$

2° $\lambda=9$

$D=0$, $D_x\neq 0$ $\Rightarrow$ sistem nema rješenja

3° $\lambda=5$ $\Rightarrow$ $D=D_x=D_y=D_z=0$ na osnovu Cramerovog pravila ne možemo ništa zaključiti. Potrebno je uraditi sistem na drugi način.

za $\lambda=5$ sistem postaje
$$3x-3y+2z=1\quad(1)$$
$$3x-3y+2z=1\quad(2)$$
$$x-y+2z=-1\quad(3)$$

$(1)=(2)$

$(2)-(3)$: $2x-2y=2$

$x=y+1$

$x-y+2z=-1$

$y+1-y+2z=-1$

$2z=-2$

$z=-1$

sistem ima beskonačno mnogo rješenja koji su oblika $(t+1,t,-1)$, $t\in R$

)^v Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra λ:
$$(\lambda+4)x+y+z=2$$
$$x+y+z=\lambda+5$$
$$3x+3y+(\lambda+7)z=3$$

Rj.
$D=(\lambda+4)(\lambda+3)$

$D_x=-(\lambda+4)(\lambda+3)$

$D_y=(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+9)$

$D_z=-3(\lambda+3)(\lambda+4)$

$(t,5-t,-3)$, $t\in R$

$(-1,2-s,s)$, $s\in R$

Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ x+\lambda y+z&=3\\ x+2\lambda y+z&=4 \end{aligned}$$

Rj. Sistem rješavamo Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\lambda&1\\1&2\lambda&1\end{vmatrix} \overset{II_v-III_v}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}1&1&1\\0&-\lambda&0\\1&2\lambda&1\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4&1&1\\3&\lambda&1\\4&2\lambda&1\end{vmatrix} \overset{I_v-II_v,\ III_v-II_v}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}1&1-\lambda&0\\3&\lambda&1\\1&\lambda&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1-\lambda\\1&\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-(1-\lambda))=1-\lambda-\lambda=1-2\lambda$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&4&1\\1&3&1\\1&4&1\end{vmatrix} \overset{III_k-I_k}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}1&4&0\\1&3&0\\1&4&0\end{vmatrix}=0$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&4\\1&\lambda&3\\1&2\lambda&4\end{vmatrix} \overset{I_v-II_v,\ III_v-II_v}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}0&1-\lambda&1\\1&\lambda&3\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\\lambda&1\end{vmatrix}=-(1-\lambda-\lambda)=2\lambda-1$$

Kako je $D=0$ to sistem može da ima beskonačno mnogo rješenja ili da nema rješenja.

1° $\lambda=\frac{1}{2}$

$D=0,\ D_x=0,\ D_y=0,\ D_z=0$

Sistem ćemo riješiti Gauss-ovom metodom

$$\begin{aligned} x+y+z&=4\\ x+\tfrac{1}{2}y+z&=3 \quad /\cdot 2\\ x+y+z&=4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+z&=4 \quad (1)\\ 2x+y+2z&=6 \quad (2) \end{aligned}$$

$(2)-(1):\ x+z=2$

$x=2-z$

$x+y+z=4$

$2-z+y+z=4$

$y=2$

Za $\lambda=\frac{1}{2}$ sistem ima ∞ mnogo rješenja koja su oblika $(2-t,\ 2,\ t)$ gdje je $t\in\mathbb{R}$.

2° $\lambda\neq\frac{1}{2}$

$D=0,\ D_x\neq 0 \Rightarrow$ sistem za $\lambda\neq\frac{1}{2}$ nema rješenja

Odrediti vrijednost parametra k tako da sistem

$$\begin{aligned} 8z-3x-6y&=kx\\ 2x+y+4z&=ky\\ 4x+3y+z&=kz \end{aligned}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Zatim naći ta rješenja za najveću dobijenu vrijednost parametra k.

Rj. Nepoznate sa desne strane prebacimo na lijevu i grupirajmo vrijednosti uz x, y i z.

$$\begin{aligned} (-3-k)x-6y+8z&=0\\ 2x+(1-k)y+4z&=0\\ 4x+3y+(1-k)z&=0 \end{aligned}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina. Trivijalno rješenje je $(0,0,0)$. Sistem ima beskonačno mnogo rješenja ako je $D=0$.

$$\begin{vmatrix}-3-k&-6&8\\2&1-k&4\\4&3&1-k\end{vmatrix}=0$$

I_k+III_k: $$\begin{vmatrix}5-k&-6&8\\6&1-k&4\\5-k&3&1-k\end{vmatrix}=0$$

I_v-III_v: $$\begin{vmatrix}0&-9&7+k\\6&1-k&4\\5-k&3&1-k\end{vmatrix}=0$$

$$-6[\underbrace{(-9)(1-k)}_{-9+9k}-\underbrace{3(7+k)}_{-21-3k}]+(5-k)[(-9)\cdot 4-\underbrace{(7+k)(1-k)}_{7-7k+k-k^2 \,=\, 7-6k-k^2}]=0$$

$$(-6)(6k-30)+(5-k)(\overbrace{-36-7}^{-43}+6k+k^2)=0$$

$$-36k+180+(-215)+30k+5k^2+43k-6k^2-k^3=0$$

$$-k^3-k^2+37k-35=0 \quad /\cdot(-1)$$

$$k^3+k^2-37k+35=0$$

$$k^3-k^2+2k^2-2k-35k+35=0$$

$$k^2(1-k)+2k(k-1)-35(k-1)=0$$

$$(k-1)(k^2+2k-35)=0$$

$$(k-1)(k+7)(k-5)=0$$

$$k_1=1,\ k_2=-7,\ k_3=5$$

Za $k=5$ imamo:

$$\begin{aligned} 8x+6y-8z&=0 \quad \dots(1)\\ 2x-4y+4z&=0 \quad \dots(2)\\ 4x+3y-4z&=0 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

$(2)+(3):\quad 6x-y=0 \Rightarrow y=6x$

$(2)\Rightarrow 2x-24x+4z=0$

$\therefore 4z=22x$

$z=\frac{11x}{2}$

$(1)=(3)$ jer se (3) dobija dijeljenjem (1) sa 2.

Za $k=5$ sistem ima rješenje $(t,\ 6t,\ \frac{11t}{2})$ gdje je $t\in\mathbb{R}$ proizvoljno.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} x - y - \lambda z &= 1 \\ (\lambda+1)y + (\lambda-1)z &= 0 \\ (\lambda+1)x - (\lambda+1)z &= 1 \end{aligned}$$

Rj.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} \overset{III_k+I_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} -1 & -(\lambda-1) \\ \lambda+1 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ 1 & 0 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} \overset{III_v-I_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & \lambda+1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{-1+\lambda+1}{=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda-1-\lambda+1$$

$$= -2\lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 1 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(1-\lambda-1) = \lambda(\lambda-1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)$$

$D=0$ akko $\lambda=0$ ili $\lambda=1$ ili $\lambda=-1$

Diskusija

1° $\lambda\neq 0$; $\lambda\neq 1$; $\lambda\neq -1$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2\lambda}{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{-2}{(\lambda-1)(\lambda+1)}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\lambda+1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{\lambda+1}$$

2° $\lambda=1$, $D=0$, $D_x\neq 0$ $\Rightarrow$ sistem nema rješenja.

3° $\lambda=-1$, $D=0$, $D_x\neq 0$ $\Rightarrow$ sistem nema rješenja

4° $\lambda=0$, $D=D_x=D_y=D_z=0$ iz ovoga ne možemo ništa zaključiti

Za $\lambda=0$ sistem postaje

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \quad (1) \\ y - z &= 0 \quad (2) \\ x - z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

(1): $x-y=1$

$(2)-(3)$: $-x+y=-1$

$x=y+1$

$x-z=1$

$-z=-(y+1)+1$

$-z=-y$

$z=y$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja $(t+1, t, t)$, $t\in\mathbb{R}$

#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra a:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x-y+az &= 1 \\ -x-3y+(a+2)z &= a^2 . \end{aligned}$$

Rj.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ -1 & -3 & a+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} I_k+III_k \\ II_k+III_k \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a+1 & a-1 & a \\ a+1 & a-1 & a+2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a+1 & a-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ a^2 & -3 & a+2 \end{vmatrix} \overset{II_k+III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & a-1 & a \\ a^2 & a-1 & a+2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a^2 & a-1 \end{vmatrix} = (-1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(a-1)(1-a^2) = (a-1)(a^2-1) = (a-1)^2(a+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & a^2 & a+2 \end{vmatrix} \overset{I_k+III_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a+1 & 1 & a \\ a+1 & a^2 & a+2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a+1 & a^2 \end{vmatrix} = (-1)(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = (-1)(a+1)(a^2-1)$$

$$= (-1)(a-1)(a+1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & a^2 \end{vmatrix} \overset{I_k-II_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & a^2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a^2 \end{vmatrix} = (-1)(2a^2-2) = (-2)(a+1)(a-1)$$

Diskusija

$D=0$ $\forall a\in\mathbb{R}$

1° $a\neq 1$; $a\neq -1$

$D=0$; $D_x\neq 0$ sistem nema rješenja

2° $a=1$

$D=D_x=D_y=D_z=0$, sistem postaje

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \quad (1) \\ x-y+z &= 1 \quad (2) \\ -x-3y+3z &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1)+(3)$: $-2y+2z=1$

$(2)+(3)$: $-4y+4z=2$

$2z=2y+1$

$z=y+\frac{1}{2}$

$x=z-y$

$x=\frac{1}{2}$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(\frac{1}{2}, t, t+\frac{1}{2})$ gdje je $t\in\mathbb{R}$.

3° $a=-1$

$D=D_x=D_y=D_z=0$, sistem postaje

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \quad I \\ x-y-z &= 1 \quad II \\ -x-3y+z &= 1 \quad III \end{aligned}$$

$(I)+(III)$: $-2y=1$

$(II)+(III)$: $-4y=2$

$y=-\frac{1}{2}$

$(I)+(II)$: $2x-2z=1$

$(III)-3\cdot(I)$: $-4x+4z=2$

$2x=2z+1$

$x=z+\frac{1}{2}$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(t+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, t)$, $t\in\mathbb{Z}$

(#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$2x-\lambda y+2z=1$$
$$x+y+2z=0$$
$$-x+(-\lambda-3)y-4z=\lambda .$$

Rj: Sistem ćemo riješiti Cramerovim pravilima.

$$D=\begin{vmatrix}2&-\lambda&2\\1&1&2\\-1&-\lambda-3&-4\end{vmatrix}\underset{III_k-II_k\cdot 2}{\overset{I_k-II_k}{=\!=}}\begin{vmatrix}2+\lambda&-\lambda&2\lambda+2\\0&1&0\\\lambda+2&-\lambda-3&2\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&2\lambda+2\\\lambda+2&2\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&2\lambda+2\\1&2\lambda+2\end{vmatrix}=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&-\lambda&2\\0&1&2\\\lambda&-\lambda-3&-4\end{vmatrix}\overset{III_k-II_k\cdot 2}{=\!=}\begin{vmatrix}1&-\lambda&2\lambda+2\\0&1&0\\\lambda&-\lambda-3&2\lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\lambda+2\\\lambda&2\lambda+2\end{vmatrix}=(2\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1\\\lambda&1\end{vmatrix}=(2\lambda+2)(1-\lambda)=2(\lambda+1)(1-\lambda)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&0&2\\-1&\lambda&-4\end{vmatrix}\overset{III_k-I_k\cdot 2}{=\!=}\begin{vmatrix}2&1&-2\\1&0&0\\-1&\lambda&-2\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1&-2\\\lambda&-2\end{vmatrix}=(-1)(-2)\begin{vmatrix}1&1\\\lambda&1\end{vmatrix}=2(1-\lambda)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&-\lambda&1\\1&1&0\\-1&-\lambda-3&\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k-II_k}{=\!=}\begin{vmatrix}2+\lambda&-\lambda&1\\0&1&0\\\lambda+2&-\lambda-3&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+2&1\\\lambda+2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1\\1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)$$

Diskusija:

$D=0,\ D_x=2(1+\lambda)(1-\lambda),\ D_y=2(1-\lambda),\ D_z=(\lambda+2)(\lambda-1)$

1° $\lambda\neq-1$; $\lambda\neq1$; $\lambda\neq-2$
imamo $D=0$; $D_x\neq0$ sistem nema rješenja

2° $\lambda=-2$ imamo $D=0$; $D_x\neq0$ sistem nema rješenja

3° $\lambda=-1$ imamo $D=0$, $D_x=0$, $D_y\neq0$ sistem nema rješenja

4° $\lambda=1$ imamo $D=D_x=D_y=D_z=0$ sistem je potrebno ispitati na drugi način.

Za $\lambda=1$ sistem postaje

$$2x-y+2z=1\quad /\cdot4$$
$$x+y+2z=0\quad /\cdot4$$
$$-x-4y-4z=1$$

$$8x-4y+8z=4\quad(1)$$
$$4x+4y+8z=0\quad(2)$$
$$-x-4y-4z=1\quad(3)$$

$(1)+(2)$: $12x+16z=4$

$(3)+(2)$: $3x+4z=1$

$3x=1-4z$

$x=\frac{1-4z}{3}$

$y=-x-2z$

$y=\frac{4z-1}{3}-\frac{6z}{3}$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja, oblika $\left(\frac{1-4t}{3},\frac{-2t-1}{3},t\right)$ $t\in\mathbb{R}$

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametra

$$x+y+bz=1-b$$
$$x-by-z=2$$
$$bx-y+z=2b .$$

Rj: Rješavamo sistem Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}1&1&b\\1&-b&-1\\b&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}b+1&1&b\\0&-b&-1\\b+1&-1&1\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}1&1&b\\0&-b&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v-III_v}{=\!=}$$
$$=(b+1)\begin{vmatrix}0&2&b-1\\0&-b&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}2&b-1\\-b&-1\end{vmatrix}=(b+1)\Big[\overbrace{-2+(b^2-b)}^{b^2-b-2}\Big]=(b+1)(b+1)(b-2)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1-b&1&b\\2&-b&-1\\2b&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}b+1&0&b+1\\2&-b&-1\\2b&-1&1\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}1&0&1\\2&-b&-1\\2b&-1&1\end{vmatrix}=$$
$$\overset{I_k-III_k}{=\!=}(b+1)\begin{vmatrix}0&0&1\\3&-b&-1\\2b-1&-1&1\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}3&-b\\2b-1&-1\end{vmatrix}=(b+1)(\overbrace{-3+2b^2-b}^{2b^2-b-3})=$$
$$=(b+1)\cdot2\left(b-\frac{3}{2}\right)(b+1)=(b+1)(2b-3)(b+1)$$

$D=1+24=25$, $b_{1,2}=\frac{1\pm5}{4}$

$$D_y=\begin{vmatrix}1&1-b&b\\1&2&-1\\b&2b&1\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}b+1&1-b&b\\0&2&-1\\b+1&2b&1\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}1&1-b&b\\0&2&-1\\1&2b&1\end{vmatrix}\overset{III_v-I_v}{=\!=}$$
$$=(b+1)\begin{vmatrix}1&1-b&b\\0&2&-1\\0&3b-1&1-b\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}2&-1\\3b-1&1-b\end{vmatrix}=(b+1)(2-2b+3b-1)=(b+1)(b+1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1&1&1-b\\1&-b&2\\b&-1&2b\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}b+1&0&b+1\\1&-b&2\\b&-1&2b\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-b&2\\b&-1&2b\end{vmatrix}\overset{I_k-III_k}{=\!=}$$
$$=(b+1)\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&-b&2\\-b&-1&2b\end{vmatrix}=(b+1)\begin{vmatrix}-1&-b\\-b&-1\end{vmatrix}=(b+1)(1-b^2)=-(b+1)(b^2-1)=-(b+1)(b-1)(b+1)$$

Diskusija: a) $D\neq0$ tj. $b\neq-1$; $b\neq2$

sistem ima jedinstveno rješenje $x=\frac{D_x}{D}=\frac{(2b-3)(b+1)^2}{(b+1)^2(b-2)}=\frac{2b-3}{b-2}$

$y=\frac{D_y}{D}=\frac{(b+1)^2}{(b+1)^2(b-2)}=\frac{1}{b-2}$; $z=\frac{D_z}{D}=\frac{-(b-1)(b+1)^2}{(b-2)(b+1)^2}=-\frac{b-1}{b-2}$

b) $b=-1 \Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0$ sistem trebamo riješiti na drugi način

Za $b=-1$ sistem postaje

$$\begin{aligned} x+y-z&=2\\ x+y-z&=2\\ -x-y+z&=-2 \quad /\cdot(-1) \end{aligned}$$

Sve tri jednačine su iste $\Rightarrow$ Sistem ima ∞ mnogo rješenja. Ako uzmemo $x=t$, $y=s$ Rješenja sistema su $(t, s, t+s-2)$ ← dvije promjenjive uzimamo proizvoljno

c) $b=2 \Rightarrow D=0,\ D_x=9\neq 0 \Rightarrow$
Sistem za $b=2$ nema rješenja

Kroneker-Kapelijeva metoda

Neka je dat sistem linearnih jednačina $Ax=b$, gdje su

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n},\quad x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix};\quad b=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

Matricu $\overline{A}=[A\,|\,b]$ zovemo proširena matrica.

Teorema (Kroneker-Kapeli):
Sistem ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\text{rang}\,A=\text{rang}\,\overline{A}=n$ (n broj nepoznatih).
Ako je $\text{rang}\,A=\text{rang}\,\overline{A}<n$ tada sistem ima ∞ mnogo rješenja. ($n-\text{rang}\,A$ nepoznatih uzima se proizvoljno)
Ako je $\text{rang}\,A<\text{rang}\,\overline{A}$ tada sistem nema rješenja.

1. Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x+4y-5z&=-5\\ -x-y+z&=0\\ 2x+y-z&=1. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \overset{I_v\leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -5 & -5\\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \underset{III_v+I_v\cdot 2}{\overset{II_v+I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & -5\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\overset{II_v\leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -3 & -5\end{array}\right] \overset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -3\end{array}\right]$$

$\text{rang}\,A=\text{rang}\,\overline{A}=3$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} -x-y+z&=0\\ -y+z&=1\\ -z&=-3\\ \hline z&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x-y&=-3\\ -y&=-2\\ \hline y&=2 \end{aligned}$$

$$-x-2=-3$$
$$x=1$$

Rješenje sistema je uređena trojka $(1,2,3)$.

(2.) Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad &= 2. \end{aligned}$$

Rj.
$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v - II_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2 < 3$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

3-2 nepoznatih uzimamo proizvoljno

$x_3 = t$

$-x_2 - 2x_3 = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$-x_2 - 2t = 0 \qquad x_1 - 2t + t = 1$

$x_2 = -2t \qquad x_1 = t + 1$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t+1, -2t, t)$ gdje je $t \in \mathbb{R}$.

(3.) Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ 3x + 6y + 9z &= 5. \end{aligned}$$

Rj.
$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\text{rang } A = 1$, $\text{rang } \bar{A} = 2$, $\text{rang } A < \text{rang } \bar{A}$

sistem nema rješenja.

(4.) Kroneker-Kapelijevom metodom diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ x + y + \lambda z &= -3. \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ sistem ima jedinstveno rješenje $\left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}, \frac{-3}{\lambda-1}\right)$

za $\lambda = -2$ sistem ima ∞ mnogo rješenja $\left(\frac{3t-4}{3}, \frac{3t-5}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

za $\lambda = 1$ sistem nema rješenja

(#) Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{C} = [C|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & \lambda \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & \lambda-30 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-68 \end{array}\right]$$

1° $\lambda - 68 \neq 0$, $\lambda \neq 68$: $\text{rang } C = 2$, $\text{rang } \bar{C} = 3$, $\text{rang } C < \text{rang } \bar{C}$. Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenje

2° $\lambda - 68 = 0$, $\lambda = 68$: $\text{rang } C = \text{rang } \bar{C} = 2 < 4$ (broj nepoznatih)

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi dvije promjenjive uzimamo proizvoljno, npr. $x_4 = t$, $x_1 = s$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 15$

$-8x_3 + 17x_4 = -38$

$x_4 = t$

$-8x_3 + 17t = -38$

$-8x_3 = -17t - 38$

$x_3 = \frac{17}{8}t + \frac{38}{8} = \frac{17}{8}t + \frac{19}{4}$

$x_1 = s$

$2s - x_2 + 3\left(\frac{17}{8}t + \frac{38}{8}\right) - 7t = 15$

$x_2 = \frac{51t}{8} + \frac{114}{8} + 2s - 7t - 15$

$x_2 = -\frac{5}{8}t - \frac{6}{8} + 2s$

$x_2 = 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4}$

Za $\lambda = 68$ rješenje sistema je $\left(s, 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4}, \frac{17}{8}t + \frac{19}{4}, t\right)$, $t, s \in \mathbb{R}$

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4&=9\\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4&=7\\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2. \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{B}=[B\,|\,b]=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12 & 7 & \lambda & 9\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2\end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{I_v \leftrightarrow IV_v} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7\\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5\\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9\end{array}\right] \underset{IV_v-I_v\cdot 4}{\overset{II_v-I_v\cdot 3,\; III_v-I_v\cdot 2}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-8 & 1\end{array}\right] \underset{IV_v-II_v}{\overset{III_v-II_v}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0\end{array}\right]$$

1° za $\lambda=8$ imamo $\operatorname{rang} B=\operatorname{rang}\bar{B}=2<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1=t$, $x_4=s$

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2\\ -x_3+0x_4&=1 \end{aligned}$$

$x_3=-1$

$2t+3x_2-2+2s=2$

$3x_2=4-2t-2s$

$x_2=\frac{2}{3}(2-t-s)$

Rješenje sistema (za $\lambda=8$) je $(t, \frac{2}{3}(2-t-s), -1, s)$ gdje su $s,t\in\mathbb{R}$.

2° za $\lambda\neq 8$ imamo $\operatorname{rang} B=\operatorname{rang}\bar{B}=3<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2=t$.

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=2\\ -x_3&=1\\ (\lambda-8)x_4&=0 \end{aligned}$$

$x_4=0$

$x_3=-1$

$2x_1+3t-2=2$

$2x_1=4-3t$

$x_1=2-\frac{3}{2}t$

Rješenje sistema (za $\lambda\neq 8$) je $(2-\frac{3}{2}t, t, -1, 0)$ gdje su $t\in\mathbb{R}$.

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4&=11\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4&=5\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4&=7\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4&=9 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{A}=[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9\end{array}\right] \underset{\sim}{I_v\leftrightarrow IV_v} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11\end{array}\right] \underset{\sim}{II_v\leftrightarrow I_v}$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11\end{array}\right] \underset{\sim}{I_k\leftrightarrow IV_k} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9\\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7\\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11\end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{I_k\leftrightarrow II_k} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9\\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7\\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11\end{array}\right]\end{array}$$

$$\underset{IV_v-I_v\cdot 4}{\overset{II_v-I_v\cdot 3,\; III_v-I_v\cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3\\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9\end{array}\right] \underset{\sim}{II_k\leftrightarrow IV_k} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9\end{array}\right]\end{array} \underset{\sim}{III_v\leftrightarrow II_v} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9\end{array}\right]$$

$$\underset{IV_v-II_v\cdot 3}{\overset{III_v-II_v\cdot 2}{\sim}} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

a) Za $\lambda=8$ imamo $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}=2<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. 2. promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$ $x_1=s$

$$\begin{aligned} -x_3-2x_4&=-3\\ -x_2+2x_1+3x_3+4x_4&=5 \end{aligned}$$

$x_3=3-2t$

$-x_2+2s+3(3-2t)+4t=5$

$x_2=2s+9-6t+4t-5$

$x_2=2s-2t+4$

Za $\lambda=8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t,s\in\mathbb{R}$

b) Za $\lambda\neq 8$ imamo $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}=3<4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.

1 (jednu) promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$

$$\begin{aligned} (\lambda-8)x_1&=0\\ -x_3-2x_4&=-3\\ -x_2+2x_1+3x_3+4x_4&=5 \end{aligned}$$

$x_1=0$

$x_3=3-2t$

$-x_2+3(3-2t)+4t=5$

$x_2=9-6t+4t-5=-2t+4$

Za $\lambda\neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

Homogeni sistemi linearnih jednačina

Homogeni sistem linearnih jednačina je oblika $A\cdot x = 0$

gdje je
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad i \quad 0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

<u>Teorema:</u> Homogeni sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D=0$ ($\det A = 0$).

1. Riješiti homogeni sistem jednačina
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad (2) \\ 2x_1 + x_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Rj. $(1)+(2)$
$$\begin{aligned} 4x_1+2x_2&=0 \\ 2x_1+x_2&=0 \quad /\cdot 2 \\ \hline 4x_1+2x_2&=0 \\ 4x_1+2x_2&=0 \end{aligned}$$

$4x_1+2x_2=0 \quad /:2$

$2x_1+x_2=0$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

$x_2=-2x_1$

$x_1=t,\ x_2=-2t,\ t\in\mathbb{R}$

$t-2t+x_3=0$

$x_3=t$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t,-2t,t)$

2. Naći λ tako da sistem
$$\begin{aligned} 3x + y + \lambda z &= 0 \\ 4x - 8y + \lambda z &= 0 \\ 5x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$
ima netrivijalna rješenja pa nađi rješenja.

Rj.
$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 4 & -8 & \lambda \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{III_v+I_v\cdot 3}{\overset{II_v+I_v\cdot 8}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 28 & 0 & 9\lambda \\ 14 & 0 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 28 & 9\lambda \\ 14 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = (-14)\cdot 3\begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -42(-\lambda+2)$$

Za $\lambda=2$ ($D=0$) u sistemu postoje netrivijalna rješenja.

Sistem sad izgleda:
$$\begin{aligned} 3x+y+2z&=0 \quad /\cdot 3 \\ 4x-8y+2z&=0 \quad /\cdot 3 \\ 5x-3y+3z&=0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 9x+3y+6z&=0 \quad (1) \\ 12x-24y+6z&=0 \quad (2) \\ 10x-6y+6z&=0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(3)-(1)$: $x-9y=0$

$(2)-(1)$: $3x-27y=0 \quad /:3$

$x-9y=0$

$x=9y,\ z=-14y$ postoji ∞ mnogo rješenja

$(9t,\ t,\ -14t),\ t\in\mathbb{R}$ su rješenja sistema

3. Za koje vrijednosti λ sistem ima netrivijalna rješenja
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda=1$ ili $\lambda=-3$

9 Sistemi linearnih jednačina

Zadatak 9.1 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{aligned} 4x-3y-2z=1\\ -2x+y+3z=-1\\ x+y-z=2 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \textit{ prepisana} \\ 2\cdot V_1+V_2 \\ 4\cdot V_1-V_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} V_1 \textit{ prepisana} \\ V_2 \textit{ prepisana} \\ 7\cdot V_2-3\cdot V_3 \end{array} \end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A)=3$ i $rang\,(A_p)=3$ pa je sistem saglasan. Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{aligned} x+y-z=2\\ 3y+z=3\\ 13z=0 \end{aligned}\right\}.$$

Iz treće jednačine vidimo da je $z=0$ i ako to uvrstimo u drugu jednačinu dobićemo

$$\begin{aligned} 3y+0 &= 3 \\ 3y &= 3 \implies y=1. \end{aligned}$$

Uvrštavajući $z=0$ i $y=1$ u prvu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} x+1-0 &= 2 \\ x+1 &= 2 \implies x=2. \end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$(x,y,z)=(1,1,0)\,.$$

Zadatak 9.2 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+z=2\\ -x+y-3z=-3\\ 2x-y-2z=-1 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \textit{ prepisana} \\ 2\cdot V_1+V_2 \\ 3\cdot V_1+V_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \begin{array}{r} V_1 \textit{ prepisana} \\ V_2 \textit{ prepisana} \\ V_2-V_3 \end{array} \end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A)=2$ i $rang\,(A_p)=2$ pa je sistem saglasan. Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{aligned} -x+y-3z=-3\\ y-8z=-7 \end{aligned}\right\}.$$

Ovaj sistem ima tri nepoznate a dvije jednačine. Zato jednu nepoznatu biramo proizvoljno.

Neka je, recimo, $z = \alpha$ gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ako $z = \alpha$ uvrstimo u drugu jednačinu, dobijamo

$$y - 8\alpha = -7 \implies y = -7 + 8\alpha.$$

Ako $y = -7 + 8\alpha$ i $z = \alpha$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} -x - 7 + 8\alpha - 3\alpha &= -3 \\ -x - 7 + 5\alpha &= -3 \\ -x &= 4 - 5\alpha \implies x = -4 + 5\alpha \end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$(x, y, z) = (-4 + 5\alpha, -7 + 8\alpha, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 9.3 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z + t = 4 \\ x + y + z + t = 3 \\ -x + 2y - 3z - t = -4 \\ x + y + 2z - 2t = 3 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje:

Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ \textit{prepisana} \\ V_1 - V_2 \\ V_1 + V_3 \\ 2 \cdot V_1 - V_4 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ \textit{prepisana} \\ V_2 \ \textit{prepisana} \\ V_1 + V_3 \\ V_4 \ \textit{prepisana} \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ \textit{prepisana} \\ V_2 \ \textit{prepisana} \\ V_3 \ \textit{prepisana} \\ V_3 - V_4 \end{array} \end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A) = 4$ i $rang\,(A_p) = 4$ pa je sistem saglasan.

Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + t = 3 \\ 3y - 2z = -1 \\ -z - t = -3 \\ -4t = -4 \end{aligned}\right\}.$$

Iz četvrte jednačine vidimo da je $t = 1$.

Ako $t = 1$ uvrstimo u treću jednačinu dobićemo

$$\begin{aligned} -z - 1 &= -3 \\ -z &= -2 \implies z = 2. \end{aligned}$$

Ako $z=2$ i $t=1$ uvrstimo u drugu jednačinu, dobićemo

$$\begin{aligned} 3y-4 &= -1 \\ 3y &= 3 \Longrightarrow y=1. \end{aligned}$$

Ako $y=1$, $z=2$ i $t=1$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobićemo

$$x+1+2+1=3 \Longrightarrow x=-1.$$

Rješenje sistema je

$$(x,y,z,t)=(-1,1,2,1)\,.$$

Zadatak 9.4 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-4z+t=2 \\ x+y-z+3t=4 \\ -x+3y-2z+2t=2 \\ 3x+4y-5z+4t=6 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 \end{bmatrix} \\ A_p &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 4 & 6 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_1+V_2 \\ 2V_1-V_3 \\ 3V_1-V_4 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ V_2+4V_3 \\ V_3-V_4 \end{array} \end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A)=3$ i $rang\,(A_p)=3$ pa je sistem saglasan.
Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{aligned} x+y-z+3t=4 \\ 4y-3z+5t=6 \\ 5z+25t=30 \end{aligned}\right\}.$$

Ovaj sistem ima četiri nepoznate a tri jednačine.
Znači, jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $t=\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})\,.$
Iz treće jednačine imamo

$$\begin{aligned} 5z+25\alpha &= 30 \\ z+5\alpha &= 6 \Longrightarrow z=6-5\alpha. \end{aligned}$$

Ako $z=6-5\alpha$ i $t=\alpha$ uvrstimo u drugu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} 4y-3\,(6-5\alpha)+5\alpha &= 6 \\ 4y-18+15\alpha+5\alpha &= 6 \\ 4y &= 24-20\alpha \Longrightarrow y=6-5\alpha. \end{aligned}$$

Ako $y=6-5\alpha, z=6-5\alpha$ i $t=\alpha$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} x+6-5\alpha-6+5\alpha+3\alpha &= 4 \\ x+3\alpha &= 4 \Longrightarrow x=4-3\alpha. \end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$(x,y,z,t)=(4-3\alpha,6-5\alpha,6-5\alpha,\alpha) \qquad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

Zadatak 9.5 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+2z=3\\ x+y-z=1\\ 4x-y+z=4\\ 2x-3y+3z=2 \end{array}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}\\ A_p &= \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right]\\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right]\\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 5 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1\ prepisana\\ V_2-3V_1\\ V_3-4V_1\\ V_4-2V_1 \end{array}\\ &\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1\ prepisana\\ V_2\ prepisana\\ V_3-V_2\\ V_4-V_2 \end{array} \end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A)=2$ i $rang\,(A_p)=2$ pa je sistem saglasan.
Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1\\ -5y+5z=0 \end{array}\right\}.$$

Ovaj sistem ima tri nepoznate a dvije jednačine.
Znači, jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $z=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.
Iz druge jednačine imamo

$$\begin{aligned} -5y+5\alpha &= 0\\ -5y &= -5\alpha \Longrightarrow y=\alpha. \end{aligned}$$

Ako $y=\alpha$ i $z=\alpha$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} x+y-z &= 1\\ x+\alpha-\alpha &= 1 \Longrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$(x,y,z)=(1,\alpha,\alpha) \qquad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

Zadatak 9.6 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y+z+t=3\\ 2x+y-2z-t=0\\ x+2y-z+t=3\\ 3x+3y-3z=3 \end{array}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}\\ A_p &= \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3\\ 3 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$
\begin{aligned}
A_p &= \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -8 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 - 2V_1 \\ V_3 - 3V_1 \\ V_4 - 3V_1 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -12 & -18 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ prepisana \\ V_2 \ prepisana \\ 8V_2 - 3V_3 \\ V_2 - V_4 \end{array}
\end{aligned}
$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A) = 3$ i $rang\,(A_p) = 3$ pa je sistem saglasan.
Formirajmo novi sistem

$$
\left.\begin{array}{r} x + 2y - z + t = 3 \\ -3y - 3t = -6 \\ -12z - 18t = -30 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + t = 3 \\ y + t = 2 \\ 2z + 3t = 5 \end{array}\right\}.
$$

Ovaj sistem ima četiri nepoznate a tri jednačine.
Znači, jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $t = \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$.
Iz treće jednačine imamo

$$
\begin{aligned}
2z + 3\alpha &= 5 \\
2z &= 5 - 3\alpha \implies z = \frac{5 - 3\alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

Ako $z = \frac{5-3\alpha}{2}$ i $t = \alpha$ uvrstimo u drugu jednačinu, dobijamo

$$
y + \alpha = 2 \implies y = 2 - \alpha.
$$

Ako $y = 2 - \alpha$, $z = \frac{5-3\alpha}{2}$ i $t = \alpha$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo

$$
\begin{aligned}
x + 2\,(2 - \alpha) - \frac{5 - 3\alpha}{2} + \alpha &= 3 \\
x + 4 - 2\alpha - \frac{5 - 3\alpha}{2} + \alpha &= 3 \\
x + \frac{8 - 4\alpha - 5 + 3\alpha + 2\alpha}{2} &= 3 \\
x + \frac{3 + \alpha}{2} &= 3 \\
x &= 3 - \frac{3 + \alpha}{2} \implies x = \frac{3 - \alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

Rješenje sistema je

$$
(x, y, z, t) = \left(\frac{3 - \alpha}{2}, 2 - \alpha, \frac{5 - 3\alpha}{2}, \alpha\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).
$$

Zadatak 9.7 *Ispitati saglasnost i riješiti sistem*

$$
\left.\begin{array}{r} 2x + 2y - z + 3t = 6 \\ 3x + y - 3z + t = 2 \\ 5x + 3y - 4z + 4t = 8 \\ x - y - 2z - 2t = -4 \end{array}\right\}.
$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\
A_p &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$\begin{aligned}
A_p &= \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 & 4 & 8 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -3 & -7 & -14 \\ 0 & -4 & -3 & -7 & -14 \\ 0 & -8 & -6 & -14 & -28 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ \textit{prepisana} \\ 2V_1 - V_2 \\ 3V_1 - V_3 \\ 5V_1 - 3V_4 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -3 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \ \textit{prepisana} \\ 2V_1 - V_2 \\ V_2 - V_3 \\ 2V_2 - V_4 \end{array}
\end{aligned}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A) = 2$ i $rang\,(A_p) = 2$ pa je sistem saglasan.
Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z - 2t = -4 \\ -4y - 3z - 7t = -14 \end{array}\right\}.$$

Ovaj sistem ima četiri nepoznate a dvije jednačine.
Znači, dvije nepoznate uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $z = \alpha, t = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.
Iz druge jednačine imamo

$$\begin{aligned}
-4y - 3\alpha - 7\beta &= -14 \\
-4y &= -14 + 3\alpha + 7\beta \Longrightarrow y = \frac{14 - 3\alpha - 7\beta}{4}.
\end{aligned}$$

Ako $y = \frac{14-3\alpha-7\beta}{4}, z = \alpha, t = \beta$ uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned}
x - \frac{14 - 3\alpha - 7\beta}{4} - 2\alpha - 2\beta &= -4 \\
x + \frac{-14 + 3\alpha + 7\beta - 8\alpha - 8\beta}{4} &= -4 \\
x + \frac{-14 - 5\alpha - \beta}{4} &= -4 \\
x &= -4 - \frac{-14 - 5\alpha - \beta}{4} \\
x &= \frac{-16 + 14 + 5\alpha + \beta}{4} \Longrightarrow x = \frac{-2 + 5\alpha + \beta}{4}
\end{aligned}$$

Rješenje sistema je

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{-2 + 5\alpha + \beta}{4}, \frac{14 - 3\alpha - 7\beta}{4}, \alpha, \beta\right) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Zadatak 9.8 *Ispitati saglasnost sistema i u slučaju saglasnosti riješiti sistem matričnom metodom*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z - 3t = -1 \\ x - y + 3z + t = 4 \\ -2x - 3y + z + t = -3 \\ 3x - 2y + 4z - 2t = 3 \end{array}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$\begin{aligned}
A &= \left[\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right] \\
A_p &= \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$
\begin{aligned}
A_p &= \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \; prepisana \\ 2V_1 - V_2 \\ 2V_1 + V_3 \\ 3V_1 - V_4 \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 22 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1 \; prepisana \\ V_2 \; prepisana \\ 5V_2 - V_3 \\ V_2 - V_3 \end{array}
\end{aligned}
$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A) = 3$ i $rang\,(A_p) = 3$ pa je sistem saglasan.

Formirajmo novi sistem

$$
\left.\begin{array}{r} x - y + 3z + t = 4 \\ -y + 5z + 5t = 9 \\ 18z + 22t = 40 \end{array}\right\}.
$$

Ovaj sistem ima četiri nepoznate a tri jednačine.
Znači, jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $t = \alpha \; (\alpha \in \mathbb{R})$.
Sada sistem ima oblik

$$
\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 4 - \alpha \\ -y + 5z = 9 - 5\alpha \\ 9z = 20 - 11\alpha \end{array}\right\}.
$$

Ovaj sistem je ekvivalentan matričnoj jednačini

$$AX = B$$

gdje su

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 - \alpha \\ 9 - 5\alpha \\ 20 - 11\alpha \end{bmatrix}.
$$

Rješenje matrične jednačine je matrica $X = A^{-1}B$.
Izračunajmo matricu A^{-1} na osnovu formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj A.$$

Determinanta matrice A je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -9$$

Kofaktori matrice A su

$$
\begin{array}{lll}
A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -9 & A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 & A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 & A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 9 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 & A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1
\end{array}
$$

pa je adjungovana matrica

$$adj A = \begin{bmatrix} -9 & 9 & -2 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice A je

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} -9 & 9 & -2 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{9} \\ 0 & -1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{2}{9} \\ 0 & -1 & \frac{5}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 - \alpha \\ 9 - 5\alpha \\ 20 - 11\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5+14\alpha}{9} \\ \frac{19-10\alpha}{9} \\ \frac{20-11\alpha}{9} \end{bmatrix}$$

pa je

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-5 + 14\alpha}{9} \\
y &= \frac{19 - 10\alpha}{9} \\
z &= \frac{20 - 11\alpha}{9}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

rješenje sistema.

Zadatak 9.9 *Ispitati saglasnost sistema i u slučaju saglasnosti riješiti sistem metodom determinanti*

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+z-3t&=-1\\ x-y+3z+t&=4\\ -2x-3y+z+t&=-3\\ 3x-2y+4z-2t&=3 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje:
Matrica koeficijenata i proširena matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 3 & 1\\ -2 & -3 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4\\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

Odredimo rang proširene matrice:

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 & -1\\ 1 & -1 & 3 & 1 & 4\\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1\\ -2 & -3 & 1 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9\\ 0 & -5 & 7 & 3 & 5\\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1\ \textit{prepisana}\\ 2V_1-V_2\\ 2V_1+V_3\\ 3V_1-V_4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 5 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 18 & 22 & 40\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{r} V_1\ \textit{prepisana}\\ V_2\ \textit{prepisana}\\ 5V_2-V_3\\ V_2-V_3 \end{array}$$

Odavdje vidimo da je $rang\,(A)=3$ i $rang\,(A_p)=3$ pa je sistem saglasan.

Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{aligned} x-y+3z+t&=4\\ -y+5z+5t&=9\\ 18z+22t&=40 \end{aligned}\right\}.$$

Ovaj sistem ima četiri nepoznate a tri jednačine.
Znači, jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno.
Neka je, npr. $t=\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R})$.
Sada sistem ima oblik

$$\left.\begin{aligned} x-y+3z&=4-\alpha\\ -y+5z&=9-5\alpha\\ 9z&=20-11\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Izračunajmo determinante D, D_x, D_y, D_z :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4-\alpha & -1 & 3\\ 9-5\alpha & -1 & 5\\ 20-11\alpha & 0 & 9 \end{vmatrix} = 5-14\alpha$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 4-\alpha & 3\\ 0 & 9-5\alpha & 5\\ 0 & 20-11\alpha & 9 \end{vmatrix} = -19+10\alpha$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4-\alpha\\ 0 & -1 & 9-5\alpha\\ 0 & 0 & 20-11\alpha \end{vmatrix} = -20+11\alpha$$

pa je

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{-5+14\alpha}{9}\\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{19-10\alpha}{9}\\ z &= \frac{D_z}{D} = \frac{20-11\alpha}{9}, \qquad \alpha\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

rješenje sistema.

Zadatak 9.10 *U zavisnosti od realnog parametra* λ *diskutovati rješenja sistema*

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^2 \end{array}\right\}.$$

Rješenje:
Izračunajmo determinante D, D_x, D_y, D_z :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array}\right| = \\
&= \left(\lambda^3+1+1\right)-(\lambda+\lambda+\lambda)=\lambda^3-3\lambda+2= \\
&= \lambda^3-\lambda-2\lambda+2=\lambda\left(\lambda^2-1\right)-2(\lambda-1)= \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)-2(\lambda-1)= \\
&= (\lambda-1)[\lambda(\lambda+1)-2]=(\lambda-1)\left[\lambda^2+\lambda-2\right]= \\
&= (\lambda-1)\left[\lambda^2+2\lambda-\lambda-2\right]=(\lambda-1)[\lambda(\lambda+2)-(\lambda+2)]= \\
&= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\,. \\
D_x &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda^2 & 1 & \lambda & \lambda^2 & 1 \end{array}\right| = \\
&= \left(\lambda^2+\lambda^2+\lambda\right)-\left(\lambda^3+1+\lambda^2\right)= \\
&= -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=-\left(\lambda^3-\lambda^2\right)+(\lambda-1)= \\
&= -\lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)=(\lambda-1)\left(1-\lambda^2\right)= \\
&= (\lambda-1)(1-\lambda)(1+\lambda)=-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)= \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)\,. \\
D_y &= \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda & 1 & \lambda^2 \end{array}\right| = \\
&= \left(\lambda^3+1+\lambda^2\right)-\left(\lambda+\lambda^3+\lambda\right)= \\
&= \lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_z &= \left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 & 1 & 1 \end{array}\right| = \\
&= \left(\lambda^4+\lambda+1\right)-\left(\lambda+\lambda^2+\lambda^2\right)= \\
&= \lambda^4-2\lambda^2+1=\left(\lambda^2-1\right)^2= \\
&= ((\lambda-1)(\lambda+1))^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2\,.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
D &= (\lambda-1)^2(\lambda+2) \\
D_x &= -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \\
D_y &= (\lambda-1)^2 \\
D_z &= (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2
\end{aligned}$$

Diskusija:

1. Ako je $D \neq 0$, tj. $\lambda \neq 1$ i $\lambda \neq -2$, tada je sistem saglasan i rješenja su data sa

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D}=\frac{-(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\
y &= \frac{D_y}{D}=\frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=\frac{1}{\lambda+2} \\
z &= \frac{D_z}{D}=\frac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.
\end{aligned}$$

2. Ako je $D=0$, tj. $\lambda=1$ ili $\lambda=-2$, tada je sistem neodređen.

* Za $\lambda=1$ imamo da je $D=D_x=D_y=D_z=0$ pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja.
Uvrštavajući $\lambda=1$ u početni sistem, dobijamo da je sistem ekvivalentan samo jednoj jednačini $x+y+z=1$. Budući da imamo jednu jednačinu a tri nepoznate, onda dvije nepoznate biramo proizvoljno. Neka su npr. $y=\alpha$ i $z=\beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Tada je $x=1-\alpha-\beta$, pa je rješenje sistema

$$(x, y, z)=(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,.$$

** Za $\lambda = -2$ imamo da je $D = 0$ ali je $D_x = 9$ pa sistem nema rješenja.

Zadatak 9.11 *U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati rješenja sistema*

$$\left.\begin{array}{r}(a-1)\,x+y-z=2a-1\\(2a-5)\,x+4y-5z=a+2\\(2a-3)\,x+y+(a-3)\,z=a+1\end{array}\right\}.$$

Rješenje:

Izračunajmo determinante D, D_x, D_y, D_z :

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 2a-5 & 4 & -5 \\ 2a-3 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = 2a(a-2)\\
D_x &= \begin{vmatrix} 2a-1 & 1 & -1 \\ a+2 & 4 & -5 \\ a+1 & 1 & a-3 \end{vmatrix} = (a-2)\,(7a-5)\\
D_y &= \begin{vmatrix} a-1 & 2a-1 & -1 \\ 2a-5 & a+2 & -5 \\ 2a-3 & a+1 & a-3 \end{vmatrix} = -a\,(a-2)\,(3a-1)\\
D_z &= \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 2a-1 \\ 2a-5 & 4 & a+2 \\ 2a-3 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = -\,(a-2)\,(9a-5)\,.
\end{aligned}$$

Diskusija:

1. Ako je $D \neq 0$ tj $2a(a-2) \neq 0$ a to je slučaj kada je $a \neq 0$ i $a \neq 2$, tada je sistem saglasan i rješenja su data sa

$$\begin{aligned}
x &= \frac{D_x}{D} = \frac{(a-2)\,(7a-5)}{2a(a-2)} = \frac{7a-5}{2a}\\
y &= \frac{D_y}{D} = \frac{-a\,(a-2)\,(3a-1)}{2a(a-2)} = -\frac{3a-1}{2}\\
z &= \frac{D_z}{D} = \frac{-\,(a-2)\,(9a-5)}{2a(a-2)} = -\frac{9a-5}{2a}.
\end{aligned}$$

2. Ako je $D = 0$, tj. $a = 0$ ili $a = 2$, tada je sistem neodređen.

* Za $a = 2$ imamo da je $D = D_x = D_y = D_z = 0$ pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja.
Uvrštavajući $a = 2$ u početni sistem, dobijamo da je sistem jednačina

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=3\\-x+4y-5z=4\\x+y-z=3\end{array}\right\}.$$

Ispitajmo saglasnost ovog sistema: Proširena matrica sistema je

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredimo njen rang:

$$\begin{aligned}
A_p &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{r} V_1 \textit{ prepisana} \\ V_1+V_2 \\ V_1-V_2 \end{array}
\end{aligned}$$

Formirajmo novi sistem

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=3\\5y-6z=7\end{array}\right\}.$$

Ovaj sistem ima tri nepoznate a dvije jednačine, pa jednu nepoznatu biramo proizvoljno. Neka je, recimo $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Sada, iz druge jednačine imamo

$$5y - 6\alpha = 7 \implies y = \frac{7-6\alpha}{5}.$$

Uvrštavajući $y = \frac{7-6\alpha}{5}$ i $z = \alpha$ u prvu jednačinu dobijamo

$$x + \frac{7-6\alpha}{5} - \alpha = 3 \implies x = \frac{8-\alpha}{5}.$$

Dakle, rješenje sistema je

$$(x, y, z) = \left(\frac{8-\alpha}{5}, \frac{7-6\alpha}{5}, \alpha\right)$$

** Za $a = 0$ imamo da je $D = 0$ ali je $D_x \neq 0$ pa sistem nema rješenja.

3. DETERMINANTE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

1. Neka su a_{ij} $(i, j=\overline{1, n})$ dati brojevi. *Determinantom n-tog reda* nazivamo broj koji se predstavlja sljedećom shemom:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a za čiju su definiciju potrebna dodatna objašnjenja.

Brojevi a_{ij} nazivaju se elementi determinante, gdje je $i\,(=\overline{1, n})$ redni broj vrste, $j\,(=\overline{1, n})$ redni broj kolone u kojoj se taj elemenat nalazi. Determinanta n-tog reda (za svako $n \in N$) ima n vrsta i n kolona.

1.1. *Minor* ili *subdeterminanta* elementa a_{ij} determinante (1) je determinanta $(n-1)$-vog reda koja se iz determinante (1) dobije precrtavanjem i-te vrste i j-te kolone i označava se sa D_{ij}. Broj $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ – označava *kofaktor* (*algebarski komplement*) elementa a_{ij}.

1.2. Determinanta prvog reda $(n=1)$ koju obrazuje broj a_{11} je upravo taj broj a_{11}. Determinantom n-tog reda $(n \geqslant 2)$ nazivamo broj:

$$(2) \qquad D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots a_{1n}A_{1n},$$

gdje smo sa D označili determinantu (1).

Primjedba:

a) Primjenom ove definicije dobije se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}-a_{12}a_{21}, \quad \text{za} \quad n=2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

za $n=3$ itd.

b) Može se dokazati da je definicija determinante n-tog refa ekvivalentna sa

$$D=\sum \pm a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

gdje se sumiranje vrši po svim permutacijama $j_1, j_2, \dots, j_n$ skupa indeksa $1, 2, \dots, n$. Za definiciju determinante najveće zasluge pripadaju Laplasu* koji je oko 1772. formulisao slijedeću teoremu:

* Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), francuski matematičar, fizičar i astronom.

2. Za determinantu n-tog reda vrijede slijedeće formule:

$$(3) \qquad a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\dots+a_{kn}A_{in}=\delta_{ki}D, \quad (k, i=\overline{1, n}),$$

$$(4) \qquad a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\dots+a_{nk}A_{nj}=\delta_{kj}D, \quad (k, j=\overline{1, n}),$$

gdje je
$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Kronekerov* simbol.

Formula (3) za $k=i$ naziva se *razvoj determinante D* po k-toj vrsti; specijalno za $k=i=1$, (3) se svodi na (2). Formula (4) za $k=j$ predstavlja razvoj determinante D po k-toj koloni.

3. Neke osobine determinante:

(*i*) Vrijednost determinante se ne mijenja pri njenoj transpoziciji, tj. ako vrste razmijene mjestâ sa odgovarajućim kolonama i obrnuto.

(*ii*) Ako dvije vrste (kolone) razmijene položaj, determinanta mijenja znak.

(*iii*) Ako su dvije vrste (kolone) determinante jednake, onda je $D=0$.

(*iv*) Determinanta se množi brojem ako se jedna i samo jedna vrsta (kolona) pomnoži tim brojem. (Kolona, tj. vrsta se množi brojem tako da joj se svi elementi pomnože tim brojem.)

(*v*) Ako su elementi jedne vrste (kolone) proporcionalni elementima neke druge vrste (kolone), tada je $D=0$.

(*vi*) Determinanta ne mijenja vrijednost ako se jednoj vrsti (koloni) doda druga vrsta (kolona) prethodno pomnožena nekim brojem. (Vrsti dodajemo vrstu tako da na njene elemente dodamo odgovarajuće elemente druge vrste.)

(*vii*) Osobine superpozicije: zbir dvije determinante reda n koje imaju $(n-1)$ jednakih vrsta (kolona) i (možda) različitu i-tu vrstu (kolonu) jednak je determinanti čija je i-ta vrsta jednaka zbiru i-tih vrstâ determinanti sabiraka, a preostale vrste ostaju nepromijenjene (kao kod sabiraka).

4. *Sistem od n linearnih algebarskih* jednačina sa n nepoznatih $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdje su $a_{ij}\,(i, j=\overline{1, n})$ i $b_i\,(i=\overline{1, n})$ dâti brojevi, zapisujemo u obliku

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Rješenjem sistema (5) nazivamo bilo koju uređenu n-torku brojeva $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, tako da je

$$a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\dots+a_{in}\xi_n=b_i, \text{ za } i=\overline{1, n}.$$

Sistem (5) je *saglasan* (kompatibilan) ako postoji bar jedno rješenje tog sistema; u suprotnom se kaže da je sistem *nesaglasan* (protivrječan).

* Leopold Kronecker (1823 – 1891), njemački matematičar.

Determinantom sistema (5) nazivamo determinantu D koja za i-tu vrstu ima koeficijente i-te jednačine sistema (5), a za j-tu kolonu koeficijente uz j-tu nepoznatu x_j.

Determinantom nepoznate x_j nazivamo determinantu $D_j(j=\overline{1, n})$, koja se dobije iz determinante D sistema (5) kada se njena j-ta kolona (tj. kolona uz nepoznatu x_j) zamijeni kolonom na desnoj strani sistema jednačina, tj. kolonom formiranom od slobodnih članova $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sistema (5).

5. *Kramerovo* pravilo*: Ako za determinantu D sistema (5) vrijedi $D \neq 0$, tada je

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=\overline{1, n})$$

jedinstveno rješenje sistema (5).

Ako je $D=0$ i $D_j \neq 0$ za bar jedno $j\,(=\overline{1, n})$, tada je sistem (5) nesaglasan.

U slučaju $D=0$ i $D_j=0$ za svako $j=\overline{1, n}$ moguće je da sistem (5) ima ili beskonačno mnogo rješenja ili da nema rješenja. Za precizniji odgovor potrebno je dodatno istraživanje.

6. Sistem linearnih jednačina (5) naziva se *homogenim* ako su svi slobodni članovi jednaki nuli. Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, tada iz (Kramerova pravila) 5. slijedi da je trivijalno rješenje $(x_1, \ldots, x_n)=(0, \ldots, 0)$ jedinstveno rješenje sistema $(\Leftarrow (\forall j=\overline{1, n});\ D_j=0)$. Da bi homogeni sistem jednačina imao netrivijalna rješenja, potrebno je i dovoljno da je $D=0$.

ZADACI

1. Izračunati determinante:

a) drugog reda

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x^3 & x^2+x+1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} m^2 & mn \\ mn & n^2 \end{vmatrix};$$

b) trećeg reda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

2. Dokazati:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & -b & -c & -d \\ a & b & -c & -d \\ a & b & c & -d \end{vmatrix} = -8abcd; \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$$

3. Riješiti nejednačinu:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Dokazati da je $a+b+c+x+y+z$ faktor determinante

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ b+x & c+y & a+z \\ c+x & a+y & b+z \end{vmatrix}$$

te izračunati determinantu.

5. Ne razvijajući determinantu, dokazati:

a) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Izračunati:

a) $$\begin{vmatrix} 13647 & 13657 & 17844 \\ 28423 & 28433 & -19371 \\ 28423 & 28433 & -19372 \end{vmatrix};$$

b) $$\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ z & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix},$$

ako kompleksni broj z zadovoljava uslov $z^5=1$;

c) $$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

ako su a, b, c dužine strane trougla i α ugao nasuprot stranice a;

d) $$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ gdje je } z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}, \text{ gdje je } z=\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}.$$

* Gabriel Cramer (1704–1752), švajcarski matematičar.

7. Izračunati Vandermondovu* determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

8. Koristeći definiciju determinante, izračunati:

a) trougaonu determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

b) dijagonalnu determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

9. Dokazati da je $D \in R$, gdje je

$$D = \begin{vmatrix} i & a & \bar{a} \\ i & b & \bar{b} \\ i & c & \bar{c} \end{vmatrix}, \sqrt{-1} = i; \ (a, b, c \in C).$$

10. Neka su dati funkcija $x \mapsto f(x)$ i dvije tačke $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ njenog grafika. Pokazati da je

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \end{vmatrix} = 0, \text{ jednačina tetive kroz tačke } A \text{ i } B.$$

11. Izračunati determinantu

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

b) Uopštiti rezultat na determinantu reda n čiji su elementi $a_{ii} = x$, $a_{ij} = a \ (i \neq j)$.

12. Dokazati da je determinanta $(n+1)$-vog reda

$$D_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} b_k \text{ ako je } a_{i1} = 1, \ i = \overline{1, n+1};$$

$$a_{ij} = x_{j-1}; \ i = \overline{1, n}; \ j = \overline{2, n+1}; \ i \neq j; \qquad a_{ii} = x_{i-1} + b_{i-1}, \ i = \overline{2, n+1}.$$

13. Data je tridijagonalna determinanta $D_n = |a_{ij}|$, tako da je:
$a_{11} = \cos\theta$, $a_{ii} = 2\cos\theta$; $a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1 \ (i = \overline{2, n})$.
Tada je $D_n = \cos n\theta \ (n \in N)$. Dokazati!

14. Neka je $a_{ii} = 0 \ (i = \overline{2, n})$, a ostali elementi determinante n-tog reda jednaki su 1. Dokazati

$$D_n = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

15. Riješiti sistem jednačina:

a) $2x_1 - x_2 - x_3 = 4$
$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$
$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11;$

b) $x + 2y - z = 1$
$2x - y - z = 0$
$-x + 2y = 1;$

c) $x + 2y - z = 2$
$2x - y - z = 0$
$-x + 2y = 0;$

d) $x + y + z + t = 0$
$3x - 5y + z - 3t = 1$
$x + 6y + 3z - 7t = 2$
$2x - y - 4z + 5t = 6.$

16. Odrediti $a \in R$ za koje je sistem linearnih jednačina saglasan i riješiti ga:

a) $(a-1)x + z = 0$
$(a+1)x - ay - z = -1$
$y + az = 1;$

b) $x + y + az + t = 1$
$x + 2y + t = 0$
$x + t = a$
$ax + z = 1;$

c) $x + y + z = a$
$x + (1+a)y + z = 2a$
$x + y + (1+a)z = 0;$

d) $ax + y + z + u = 1$
$x + ay + z + u = a$
$x + y + az + u = a^2$
$x + y + z + au = a^3;$

e) $x + y + z = 6$
$ax + 4y + z = 5$
$6x + (a+2)y + 2z = 13.$

17. Odrediti $a, b \in R$ za koje je dati sistem jednačina saglasan i riješiti ga:

a) $ax + 2z = 2$
$5x + 2y = 1$
$x - 2y + bz = 3;$

b) $ax + by + z = 1$
$x + aby + z = b$
$x + by + az = 1;$

c) $ax + y + z = 4$
$x + by + z = 3$
$x + 2by + z = 4.$

18. Riješiti sistem homogenih jednačina $(\lambda \in R)$:

a) $2x + \lambda y - 3z = 0$
$3x - y + 5z = 0$
$x - 2y + (\lambda + 7)z = 0;$

b) $2x + y - 4z = 0$
$3x + 5y - 7z = 0$
$4x - 5y - 6z = 0;$

c) $x + 2y = 0$
$(\lambda + 3)y + z = 0$
$x + \lambda z = 0;$

d) $3x - y + z = 0$
$\lambda x - y + 2z = 0$
$x + \lambda y + (\lambda + 1)z = 0;$

e) $2x + 3y - z - t = 0$
$x - y - 2z - 4t = 0$
$3x + y + 3z - 2t = 0$
$6x + 3y - 7t = 0.$

* Vandermonde A. T. (1736–1796), francuski matematičar.

19. Provjeriti da sistem

$$2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0$$
$$3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0$$
$$4x_1+5x_2-7x_3-2x_4=0$$
$$13x_1-25x_2+x_3+11x_4=0$$

ima rješenje $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Da li se bez računanja može tvrditi da li je determinanta sistema jednaka nuli (ili je različita od nule)?

20. Dokazati da sistem

$$ax+by+cz+dt=0$$
$$bx-ay+dz-ct=0$$
$$cx-dy-az+bt=0$$
$$dx+cy-bz-at=0$$

ima jedinstveno rješenje ako su $a, b, c, d\in R$ i $(a, b, c, d)\neq(0, 0, 0, 0)$.

21. Riješiti sistem jednačina:

a) $x+y+z=a,$
$x+ky+k^2z=b,$
$x+k^2y+kz=c,\ (k\neq1,\ k^3=1);$

b) $-x+y+z+t=a,$
$x-y+z+t=b,$
$x+y-z+t=c,$
$x+y+z-t=d.$

22. Odrediti polinom $P:R\to R$ najnižeg stepena koji ispunjava slijedeće uslove:

a) $P(1)=-1,\ P(-1)=9,\ P(2)=-3;$

b) $P(-1)=0,\ P(1)=4,\ P(2)=3,\ P(3)=6;$

c) grafik funkcije $y=P(x)$ prolazi kroz tačke $(0, 1), (1, -1), (2, 5), (3, 37);$

d) grafik funkcije $x=P(y)$ prolazi kroz tačke $(5, 0), (-13, 2), (-10, 3), (-2, 1), (14, -1).$

23. Riješiti jednačine:

a) $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1\\ x+2 & x-4 & x\\ x-1 & x+4 & x-5\end{vmatrix}=0;$

b) $\begin{vmatrix} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x\\ 1 & a & 1-a\end{vmatrix}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{4};$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 2-x & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & n-x & \end{vmatrix}=0;$

d) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n\end{vmatrix}=0;$

e) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1}\\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \dots & a_{n+1}\\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \dots & a_{n+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+a_{n+1}-x\end{vmatrix}=0,\ (a_i\neq a_j \Leftarrow i\neq j).$

RJEŠENJA

1. a) 5; 1; 1; 0. b) 0; 1; $(b-a)(c-a)(c-b)$; $(b-a)(c-a)(c-b)$.

2. Ako 1. vrstu oduzmemo od 2, 3. i 4. vrste, dobije se:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ 0 & -2b & -2c & -2d\\ 0 & 0 & -2c & -2d\\ 0 & 0 & 0 & -2d\end{vmatrix}=a\cdot(-2b)(-2c)(-2d)=-8abcd.$$

Oduzećemo 3. vrstu od 4. vrste, 2. od 3. i 1. od druge vrste. Dobijemo

$$D=\begin{vmatrix} a & a & a & a\\ 0 & b-a & b-a & b-a\\ 0 & 0 & c-b & c-b\\ 0 & 0 & 0 & d-c\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c).$$

3. Kako je

$$\begin{vmatrix} x & 3 & x\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & x & 1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 3\\ x & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & x\\ x & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=x(1-3x)-2(3-x^2)+9-x=3-x^2;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ x & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & x\end{vmatrix}=2x,$$

treba da je: $-x^2+3>2x\Leftrightarrow x^2+2x-3<0\Leftrightarrow x\in(-3, 1)$.

4. Ako na prvu kolonu determinante dodamo ostale kolone, determinanta ne mijenja vrijednost, prema teoremi 3 (*vi*). Stoga je:

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c+x+y+z & b+y & c+z\\ a+b+c+x+y+z & c+y & a+z\\ a+b+c+x+y+z & a+y & b+z\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & b+y & c+z\\ 1 & c+y & a+z\\ 1 & a+y & b+z\end{vmatrix}$$ (oduzmimo 1. vrstu od 2. i 3. vrste)

$$=(a+b+c+x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & b+y & c+z\\ 0 & c-b & a-c\\ 0 & a-b & b-c\end{vmatrix}$$ (razvijanje determinanta po elementima 1. kolone)

$$=(a+b+c+x+y+z)\cdot1\cdot\begin{vmatrix} c-b & a-c\\ a-b & b-c\end{vmatrix}=(a+b+c+x+y+z)[-(c-b)^2-(c-a)(b-a)]$$

$$=(a+b+c+x+y+z)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2).$$

5. I u a) i u b) primijeniti pravilo 3 (*vii*).

6. a) 147 760;

b) dodati prvu kolonu na drugu i razviti determinantu po prvoj vrsti. Izlazi redom:

$$D=\begin{vmatrix} z & 0 & 0\\ 0 & z^2 & -1\\ 1 & z+1 & z+1\end{vmatrix}=z\begin{vmatrix} z^2 & -1\\ z+1 & z+1\end{vmatrix}=z(z+1)\begin{vmatrix} z^2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=z(z+1)(z^2+1)=z^4+z^3+z^2+z.$$

Sada je prema formuli za zbir geometrijske progresije (vidi zadatak 1.3.9.):

$$D=\frac{z^5-z}{z-1},\ \text{za } z\neq1,$$
$$=4,\ \text{za } z=1,$$

tj.

$D=-1$, za $z\neq 1 \wedge z^5=1$,

$\quad =4$, za $z=1$;

c) $D=(a^2-b^2-c^2+2bc\cos\alpha)\sin^2\alpha=0$, pošto je prema kosinusnoj teoremi $a^2=b^2+c^2-2bc\cos x$.

d) Ako na prvu kolonu dodamo preostale kolone, dobijemo

$$D(z)=(z^2+z+1)\begin{vmatrix}1 & z & z^2\\ 1 & 1 & z\\ 1 & z^2 & 1\end{vmatrix}=\frac{z^3-1}{z-1}\begin{vmatrix}1 & z & z^2\\ 1 & 1 & z\\ 1 & z^2 & 1\end{vmatrix}\ (z\neq 1).$$

Sada je za $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$, $z^3=\operatorname{cis}2\pi=1$, tako da je $D\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$.

e) Sada je $z^3=1$, tj. $z^2+z+1=0\ (z\neq 1)$, tako da je nakon dodavanja svih kolona na prvu kolonu

$$D(z)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ z^2+z+1 & z & z^2\\ z^2+z+1 & z^2 & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & z & z^2\\ 0 & z^2 & z\end{vmatrix}=3(z^2-z^4)=$$

$$=3(-1-z-1\cdot z)=-3-6z=3i\cdot\sqrt{3}.$$

7. Ovo je Vandermondeova determinanta n-tog reda, koju ćemo označiti sa V_n. Pomnožimo k-tu kolonu determinante V_n sa $-x_n$ i dodajmo je $(k+1)$-voj koloni redom za $k=n-1, n-2, \dots, 1$. Na taj način se dobije:

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1-x_n)\\ 1 & x_2-x_n & x_2(x_2-x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2-x_n)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n)\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(x_1-x_n)(x_2-x_n)\dots(x_{n-1}-x_n)V_{n-1}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})V_{n-1},$$

gdje je

$$V_{n-1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & & x_2^{n-2}\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}$$

Vandermondeova determinanta $(n-1)$-vog reda.

$$V_2=\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1,$$

dobija se

$V_n \quad =(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})V_{n-1}$,

$V_{n-1}=(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\dots(x_{n-1}-x_n)V_{n-2}$,

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$V_3 \quad =(x_3-x_1)(x_3-x_2)V_2$,

odakle se dobije

$V_n=(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})($

$)(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})($

$\cdot$

$\cdot$

$)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

$)(x_2-x_1)$.

Ovaj rezultat se može zapisati u obliku

$$V_n=\prod_{1\leq j<k\leq n}(x_k-x_j).$$

8. a) Trougaona determinanta jednaka je proizvodu dijagonalnih elemenata, tj.

$$a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Zapisati gornju trougaonu determinantu kod koje su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli i provjeriti da za nju vrijedi isti rezultat.

b) Dijagonalna determinanta je istovremeno i (donja i gornja) trougaona, te za nju vrijedi isti rezultat.

9. Konjugovana vrijednost determinante je

$$\overline{D}=\begin{vmatrix}-i & \overline{a} & a\\ -i & \overline{b} & b\\ -i & \overline{c} & c\end{vmatrix}\ (\overline{\overline{z}}=z \wedge \overline{i}=-i)$$

$$=(-1)^2\begin{vmatrix}i & a & \overline{a}\\ i & b & \overline{b}\\ i & c & \overline{c}\end{vmatrix},\ \text{tj. } \overline{D}=D \Leftrightarrow D\in R.$$

10. Ako ovu determinantu označimo sa $D(x, y)$, tada se data jednačina kraće zapisuje u obliku $D(x, y)=0$.

Ta jednačina je linearna po x i y, te predstavlja jednačinu pravca. Kako je, osim toga,

$$D(a,f(a))=\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}=0;\quad D(b,f(b))=\begin{vmatrix}1 & b & f(b)\\ 1 & a & f(a)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}=0,$$

jer u determinantama $D(a,f(a))$ i $D(b,f(b))$ postoje dvije jednake vrste. Prema tome, prava $D(x,y)=0$ prolazi kroz tačke $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$, što je i trebalo dokazati.

11. a) Saberimo redom sve kolone od druge do pete i dodajmo prvoj, a potom oduzmimo prvu vrstu redom od svake vrste počevši od druge do pete (zadnje) vrste. Dobije se (dijagonalna determinanta)

$$D=\begin{vmatrix}9 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 5 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 1 & 5 & 1 & 1\\ 9 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 9 & 1 & 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$

$=9\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=9\cdot 4^4$ (vidi zadatak 8).

b) Istim transformacijama (koje ne mijenjaju vrijednost determinante) kao i u slučaju a) dobije se dijagonalna determinanta, tako da je

$D=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

12. Oduzeti prvu vrstu redom od svake vrste počevši od druge do posljednje $(n+1)$-ve vrste. Dobije se dijagonalna determinanta, odakle se, pak, dobije traženi rezultat.

13. Ako determinantu D_{n+1} razvijemo po elementima posljednje vrste, dobijemo

(1) $\qquad D_{n+1}=2\cos\theta\, D_n-D_{n-1}$.

Pretpostavimo sada da su tačne formule

(2) $D_{n-1}=\cos(n-1)\theta$, $D_n=\cos n\theta$ (induktivna pretpostavka).

Tada je, prema (1) i (2),

$D_{n+1}=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n\theta-\theta)=\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta=\cos(n+1)\theta$.

Na osnovu definicije determinante D_n imamo

$$D_1=\cos\theta,\ D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\cos 2\theta,$$

tj. formula $D_n=\cos n\theta$ je tačna za $n=1$ i $n=2$.

Time je induktivni dokaz završen.

14. Uporediti sa zadatkom 11.b).

15. a) Determinanta sistema je $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}=60\neq 0,$

te je prema Kramerovom pravilu (vidi teoremu 5)

$$(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{D}(D_1, D_2, D_3)$$
$$=(3, 1, 1),$$

jer je

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}=180,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}=60,\ D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}=60.$$

b) $(x, y, z)=(-1, 0, -2)$; c) $(x, y, z)=(4, 2, 6)$;

d) Determinanta sistema $D=6\cdot 7\cdot 11\neq 0$, determinante nepoznatih

$D_x=3\cdot 191,\ D_y=6\cdot 5\cdot 7,\ D_z=-3\cdot 213,\ D_t=-6\cdot 24,$

tako da je

$$(x, y, z, t)=\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}, \frac{D_t}{D}\right)=\left(\frac{191}{154}, \frac{5}{11}, \frac{-213}{154}, \frac{-24}{77}\right).$$

16. a) Determinanta sistema je

$$D=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a+1 & -a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a(1+a)(2-a),$$

a determinante nepoznatih

$$D_x=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} -1 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-1,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a+1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)(1-a)+1(a+1)=a(3-a),$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ a+1 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix} -a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2.$$

Mogući su slučajevi

(*i*) $D\neq 0 \Leftrightarrow (a\neq 0 \wedge a\neq -1 \wedge a\neq 2)$.

Tada sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{a-1}{a(1+a)(2-a)}, \frac{3-a}{(1+a)(2+a)}, \frac{(a-1)^2}{a(1+a)(a-2)}\right);$$

(*ii*) $a=0 \Rightarrow (D=0 \wedge D_x=-1\neq 0) \Rightarrow$ sistem je nesaglasan (u tom slučaju prva jednačina $-x+z=0$ je protivrječna drugoj jednačini $x-z=-1$);

(*iii*) $a=-1 \Rightarrow (D=0,\ D_x=-2\neq 0) \Rightarrow$ sistem je nesaglasan, (u ovom slučaju su protivrječne druga $y-z=-1$ i treća $y-z=1$ jednačina).

(*iv*) $a=2 \Rightarrow (D=0,\ D_x=1\neq 0) \Rightarrow$ sistem je nesaglasan.

b) Determinante sistema i nepoznatih su:

$D=2a^2,\ D_x=3a-2,\ D_y=-a^3,\ D_z=2a-a^2,\ D_t=2a^3-3a+2.$

Za $a\neq 0$ ($\Leftrightarrow D\neq 0$) sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z, t)=\left(\frac{3a-2}{2a^2}, \frac{-a}{2}, \frac{2-a}{2a}, \frac{2a^3-3a+2}{2a^2}\right);$$

dok za $a=0 \Rightarrow (D=0,\ D_x=-2\neq 0)$, te je sistem nesaglasan.

c) Sada je $D=a^2,\ D_1=a^3,\ D_2=a^2,\ D_3=-a^2$.

Za $a\neq 0$ ($\Leftrightarrow D\neq 0$) je jedinstveno rješenje sistema

$$(x, y, z)=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right)=(a, 1, -1).$$

Za $a=0$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te je potrebno dodatno razmatranje. U tom slučaju sistem se svodi na

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

jednu jednačinu. U ovom slučaju dvije nepoznate možemo birati proizvoljno, npr. $x=\alpha$, $y=\beta$ i $z=-\alpha-\beta$, tj. sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rješenja ili $(\forall\alpha, \beta\in R)$

$(x, y, z)=(\alpha, \beta, -\alpha-\beta)$.

d) Za ovaj sistem je

$D=(a+3)(a-1)^3,\ D_x=-(a^2+2a+3)(a-1)^3,$

$D_y=-(a^2+a-1)(a-1)^3,\ D_z=(2a+1)(a-1)^3,\ D_t=(a^3+3a^2+2a+1)(a-1)^3.$

Prema tome, razlikujemo tri slučaja:

(*i*) $a=1 \Rightarrow (\forall\alpha, \beta, \gamma\in R)(x, y, z, u)=(1-\alpha-\beta-\gamma, \alpha, \beta, \gamma)$;

(*ii*) $a=-3 \Rightarrow$ sistem je protivrječan;

(*iii*) $a\notin\{1, -3\} \Rightarrow (x, y, z, u)=\left(-\frac{a^2+2a+3}{a+3}, -\frac{a^2+a-1}{a+3}, \frac{2a+1}{a+3}, \frac{a^3+3a^2+2a+1}{a+3}\right)$.

e) Kako je $D=(a+3)(a-4),\ D_1=a-3,\ D_2=a+3,\ D_3=6(a+3)(a-4)$, to je za $a\notin\{-3, 4\}$

$$(x, y, z)=\left(\frac{-1}{a-4}, \frac{1}{a-4}, 6\right);$$

za $a=-3$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te su potrebna dodatna ispitivanja. Primijetiti da se sabiranjem 2. i 3. jednačine dobije $3x+3y+3z=18$, što je ekvivalentno s prvom jednačinom. Dakle, u ovom slučaju ima beskonačno mnogo rješenja. Tako iz 1. i 3. jednačine izlazi:

$$(\forall z\in R)(x, y, z)=\left(\frac{19-3z}{7}, \frac{23-4z}{7}, z\right).$$

Za $a=+4$ je $D=0 \wedge D_1=-7\neq 0$, te je sistem nesaglasan.

17. a) Kako je $D=2(ab-12),\ D_1=4(b-4),\ D_2=ab-12-10(b-4)\ D_3=8(a-3)$, to za $ab\neq 12$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{2(b-4)}{ab-12}, \frac{ab-10b+28}{2(ab-12)}, \frac{4(a-3)}{ab-12}\right).$$

Za $a=3 \wedge b=4$ ($\wedge ab=12$) sistem ima beskonačno mnogo rješenja; iz prve dvije jednačine izlazi:

$$(\forall z\in R)(x, y, z)=\left(\frac{2-2t}{3}, \frac{10t-7}{6}, t\right).$$

Za $ab=12 \wedge b\neq 4$ ($\wedge a\neq 3$) je

$D=0 \wedge D_1\neq 0$, te je sistem protivrječan.

b) Sada je $D=b(a+2)(a-1)^2,\ D_1=b(a-b)(a-1)$

$D_2=(a-1)(ba+b-2),\ D_3=b(a-1)(a-b).$

(*i*) Prema tome, za $D=b(a+2)(a-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow b\neq 0 \wedge a\neq -2 \wedge a\neq 1$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D}\right).$$

(*ii*) Za $b=0$ je $D=D_1=D_3=0 \wedge D_2=-2(a-1)$ tako da je $D_2\neq 0$ za $a\neq 1$ (i $b=0$), te je za $b=0 \wedge a\neq 1$ sistem protivrječan; za $a=1$, $b=0$ sistem se svodi na $x+z=1$, $x+z=0$, $x+z=1$, što je protivrječno. Dakle, za $b=0$ sistem je protivrječan.

(*iii*) Za $a=1$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$, te su potrebna dodatna istraživanja. Tada se sistem svodi na

$$\begin{aligned} x+by+z&=1\\ x+by+z&=b\\ x+by+z&=1, \end{aligned}$$

te se vidi da je ili sistem protivrječan za $a=1 \wedge b\neq 1$, a da za $a=1 \wedge b=1$ ima beskonačno mnogo rješenja.

(*iv*) Za $a=-2$ razlikujemo $b\neq -2 \vee b=-2$.
U prvom slučaju $a=-2 \wedge b\neq -2 \Rightarrow D=0 \wedge D_2=3(b+2)\neq 0$, te je sistem protivrječan. U slučaju kad je $a=-2$, $b=-2$ ($\Rightarrow D=D_1=D_2=D_3=0$) sistem se svodi na

$$\left.\begin{aligned} -2x-2y+\ z&=\ \ 1\\ x+4y+\ z&=-2\\ x-2y-2z&=\ \ 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -2x-2y+z&=\ \ 1\\ x+4y+z&=-2. \end{aligned}\right.$$

Provjeriti zadnju ekvivalenciju i pokazati da je opšte rješenje sistema
$(\forall y\in R)\ (x, y, z)=(-2y-1, y, -2y-1)$.
Prema tome, sistem je saglasan:

- za $a\neq 1 \wedge a\neq -2 \wedge b\neq 0$ kad ima jedinstveno rješenje prema Kramerovu pravilu;
- za $(a, b)\in \{(1, 1), (-2, -2)\}$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

U svim drugim slučajevima sistem je protivrječan.

c) Sada je

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1\\ 0 & b & 1\\ 0 & 2b & 1\end{vmatrix}=-(a-1)b,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1\\ 3 & b & 1\\ 4 & 2b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1\\ -1 & b & 1\\ 0 & 2b & 1\end{vmatrix}=1-2b,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=-(a-1),$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 4\\ 1 & b & 3\\ 1 & 2b & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & b\\ 1 & 2b\end{vmatrix}=4ab+3+8b-4b-6ab-4$$

$=4b-2ab-1$. (Prema Sarusovu* pravilu)

(*i*) Za $D\neq 0 \Leftrightarrow -(a-1)b\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 1 \wedge b\neq 0$ sistem, prema Krameru, ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z)=\left(\frac{2b-1}{b(a-1)}, b, \frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}\right).$$

(*ii*) Za $a=1 \wedge b\neq \frac{1}{2}$ je $D=0 \wedge D_1\neq 0$, te je sistem protivrječan.

(*iii*) Za $a=1 \wedge b=\frac{1}{2}$ je $D=D_1=D_2=D_3=0$. Pokazuje se da sistem ima beskonačno mnogo rješenja.
$(\forall z\in R)\ (x, y, z)=(2-z, 2, z)$

(*iv*) Za $b=0$ je $D=0$, $D_1=1\neq 0$, sistem je protivrječan.

* Sarrus, P. F. (1789–1861).

18. a) Determinanta sistema je

$$D=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -3\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & -2 & \lambda+7\end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-1),$$

pa zbog toga (vidi definiciju i teoremu 6) homogeni sistem ima samo trivijalno rješenje za $\lambda\notin\{-7, 1\}$, tj. tada je $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ jedinstveno rješenje sistema.
Za $\lambda=-7$ sistem se svodi na

$$\left.\begin{aligned} 2x-7y-3z&=0\\ 3x-\ y+5z&=0\\ x-2y\qquad&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2x-7y-3z&=0\\ \\ x-2y\qquad&=0 \end{aligned}\right.$$

(gdje je posljednja jednačina posljedica prve dvije:
$5(2x-7y-3z)+5(3x-y+5z)=0 \Leftrightarrow 19(x-2y)=0$).
Dakle, za $\lambda=-7$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja:
$(\forall y\in R)(x, y, z)=(2y, y, -y)$.
Za $\lambda=1$ slično se dobije

$$(\forall y\in R)(x, y, z)=\left(\frac{-2y}{19}, y, \frac{5y}{19}\right).$$

b) Determinanta sistema je $D=0$, te sistem ima netrivijalna rješenja $(x, y, z)=(13z/7, 2z/7, z)$ za svako $z\in R$.

c) Za $\lambda\in\{-2, -1\}$ sistem ima netrivijalna rješenja:
$(\lambda=-2)(\forall z)(x, y, z)=(2z, -z, z)$
$(\lambda=-1)(\forall z)(x, y, z)=(z, z/2, z)$.

d) $$\text{Iz } D\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ \lambda & -1 & 2\\ 1 & \lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=2(\lambda^2-4\lambda-2)=0 \Leftrightarrow \lambda\in\{2\pm\sqrt{6}\}.$$

Samo za ove vrijednosti λ sistem ima netrivijalna rješenja. Odrediti ih.

e) U ovom slučaju je

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -4\\ 3 & 1 & 3 & -2\\ 6 & 3 & 0 & -7\end{vmatrix}=-6D_{41}+3D_{42}-0D_{43}+(-7)D_{44}=-6\cdot 55+3\cdot 33-7(-33),$$

tj. $D=0$.
To znači da dati homogeni sistem ima netrivijalna rješenja. Kako je $D_{44}=-33\neq 0$, to se netrivijalna rješenja dobiju iz sistema

$$(*)\quad \begin{aligned} 2x+3y-\ z&=\ t\\ x-\ y-2z&=4t\\ 3x+\ y+3z&=2t \end{aligned}$$

sa tri nepoznate x, y, z za proizvoljnu vrijednost t. Determinanta tog sistema je
$\Delta=D_{44}=-33$,
a determinante nepoznatih

$$\left.\begin{aligned} \Delta_x&=-t\cdot D_{41}=-55t\\ \Delta_y&=t\,D_{42}=33t\\ \Delta_z&=22t \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x, y, z, t)=\left(\frac{5}{3}t, -t, -\frac{2}{3}t, t\right), \text{ (za svako } t\in R).$$

19. Pošto sistem ima netrivijalnih rješenja, to je $D=0$. Ukoliko bi bilo suprotno, $D\neq 0$, onda bi prema Kramerovu pravilu sistem imao jedinstveno, trivijalno rješenje $(x_1, x_2, x_3, x_4)=(0, 0, 0, 0)$.

Pošto je determinanta formata 3×3 sastavljena od koeficijenata iz prve tri jednačine u prve tri nepoznate, riješiti prve tri jednačine po x_1, x_2, x_3, uzimajući x_4 kao proizvoljnu vrijednost. Zatim provjeriti da tako dobijeno rješenje zadovoljava preostalu, četvrtu jednačinu.

20. Determinanta sistema je $D=-(a^2+b^2+c^2+d^2)\neq 0$.

21. a) $(x, y, z)=\frac{1}{3}(a+b+c,\ a+bk^2+ck,\ a+bk+ck^2)$.

Rješenje se može dobiti Kramerovim metodom. Na drugi način se dobije ako saberemo sve jednačine, ili saberemo sve jednačine pošto smo drugu pomnožili sa k^2, a treću sa k ili, najzad, saberemo jednačine pošto smo drugu jednačinu pomnožili sa k, a treću sa k^2. Pri tome se primjenjuje uslov $1+k+k^2=0$.

b) $(x, y, z, t)=\frac{1}{4}(s-2a,\ s-2b,\ s-2c,\ s-2d)$,

gdje je $s=a+b+c+d$. Primijeniti Kramerov metod ili sabrati sve jednačine i dobiti jednačinu $2(x+y+z+t)=s$.

22. a) Iz tri data uslova: $f(1)=1$, $f(-1)=9$, $f(2)=-3$, moguće je dobiti tri jednačine te odrediti tri nepoznata koeficijenta, pa je traženi polinom drugog stepena

$y=P_2(x)=ax^2+bx+c$.

Iz datih uslova dobije se sistem jednačina

$$\left.\begin{aligned} a+\ b+c&=-1\\ a-\ b+c&=\ \ 9\\ 4a+2b+c&=-3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow(a, b, c)=(1, -5, 3),$$

tj.

$y=P(x)=x^2-5x+3$;

b) $y=2x^3-5x^2+7$; c) $y=3x^3-5x^2+1$; d) $x=y^4-3y^3-5y+5$.

23. a) $x=\frac{2}{3}$; b) $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in N$; c) ako se prva vrsta oduzme od svih ostalih, dobije se dijagonalna determinanta, tako da se jednačina svodi na

$-x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)=0\Leftrightarrow x\in\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Primjedba: Jednačina c) se može riješiti, a da se ne izračuna determinanta. Dovoljno je zaključiti da se radi o algebarskoj jednačini n-tog stepena, koja onda ima tačno n korijena. Tako je za $x=k\in\{0, 1, \ldots, n\}$ data determinanta jednaka nuli, jer su joj jednake prva i $(k+2)$-va kolona. Jasno, otkrivajući sve nule, moguće je zapisati faktorizaciju polinoma, tj. sračunati determinantu. Koristiti to u d) i e) te dokazati:

d) korijeni su $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $\ldots$, $x_n=a_n$.

Vektorski prostor

Realni vektorski prostor

Definicija: Realni vektorski prostor je skup V zajedno sa dva zakona kompozicije:

(a) sabiranje: $V\times V \longrightarrow V$ (pišemo $(\vec v,\vec w) \rightsquigarrow \vec v+\vec w$)

(b) skalarno množenje: $\mathbb{R}\times V\to V$ (pišemo $(c,\vec v)\rightsquigarrow c\vec v$)

Ovi zakoni kompozicije moraju zadovoljavati sljedeće 4 aksiome:

(I) sabiranje čini V u Abelovu grupu V^+ (zatvorenost, asocijativnost, postoje neutralni i inverzni elem., komutativnost)

(II) skalarno množenje je asocijativno sa množenjem realnih brojeva $(ab)\vec v = a(b\vec v)$

(III) skalarno množenje sa realnim brojem 1 je identična operacija: $1\cdot\vec v=\vec v$

(IV) važe dva distributivna zakona: $(a+b)\vec v = a\vec v+b\vec v$
$a(\vec v+\vec w)=a\vec v+a\vec w$.

(#) Sa $\mathbb{R}^3$ označimo skup svih vektor kolona $\vec v = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ gdje su $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$. Definišimo sljedeće dvije operacije:

vektorsko sabiranje $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}$;

skalarno množenje $c\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ca_1\\ca_2\\ca_3\end{bmatrix}$.

Dokažimo da ove operacije čine $\mathbb{R}^3$ vektorskim prostorom.

Rj. Trebamo provjeriti da li su zadovoljene četri navedene aksiome iz definicije.

(I) Sabiranje čini $\mathbb{R}^3$ Abelovom grupom

(a) zatvorenost: $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ za $\forall\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

(b) asocijativnost: $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\\a_3+(b_3+c_3)\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\\(a_3+b_3)+c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$ vrijedi zakon asocijativnosti

(c) neutralni element je $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

(d) inverzni element je $\begin{bmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ vrijedi aksiom (I)

(e) komutativnost: PROVJERITI ZA VJEŽBU

(II) $\forall(a,b\in\mathbb{R})\ \forall(\vec v\in\mathbb{R}^3)\quad (ab)\vec v=a(b\vec v)$

$(ab)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(ab)a_1\\(ab)a_2\\(ab)a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(ba_1)\\a(ba_2)\\a(ba_3)\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}ba_1\\ba_2\\ba_3\end{bmatrix}=a\left(b\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\right)$ vrijedi aksiom (II)

(III) $1\cdot\vec v=\vec v$
$\forall\vec v\in\mathbb{R}^3\quad 1\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ vrijedi aksiom (III)

(IV) $(a+b)\vec v=a\vec v+b\vec v$ i $a(\vec v+\vec w)=a\vec v+a\vec w$

$(a+b)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a+b)a_1\\(a+b)a_2\\(a+b)a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa_1+ba_1\\aa_2+ba_2\\aa_3+ba_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa_1\\aa_2\\aa_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ba_1\\ba_2\\ba_3\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

DRUGU OSOBINU PROVJERITI ZA VJEŽBU

Sve četri aksiome su zadovoljene, prema tome $\mathbb{R}^3$ je vektorski prostor.

(#) Dat je neki vektorski prostor V. Pokazati da vrijede sljedeći identiteti:

(a) $0\cdot\vec v=\vec 0$ za sve $\vec v\in V$

(b) $c\,\vec 0=\vec 0$ za sve $c\in\mathbb{R}$

(c) $(-1)\vec v=-\vec v$ za sve $\vec v\in V$

Rj. (a) $\underline{0\vec v}+0\vec v \overset{\text{distributivni zakon}}{=} (0+0)\vec v = 0\vec v = \underline{0\vec v}+\vec 0 \Rightarrow 0\vec v=\vec 0$ q.e.d.

(b) $\underline{c\vec 0}+c\cdot\vec 0 \overset{\text{distributivni zakon}}{=} c(\vec 0+\vec 0) = c\vec 0 = \underline{c\vec 0}+\vec 0 \Rightarrow c\cdot\vec 0=\vec 0$ q.e.d.

(c) $\vec v+(-1\vec v) = 1\vec v+(-1)\vec v = (1+(-1))\vec v = 0\vec v=\vec 0$

prema tome $-1\vec v$ je inverzni element sabiranja od $\vec v$
$\Rightarrow -1\vec v=-\vec v$ q.e.d.

Podskup W prostora V je podprostor prostora V ako i samo ako je W neprazan podskup od V i: $\forall(\vec{v}, \vec{w} \in W)\ \forall(a \in \mathbb{R})$ vrijedi da je: $\vec{v}+\vec{w} \in W$
$a\vec{v} \in W$.

Dokazati.

Rj. „$\Rightarrow$": postavka zadatka:
W vektorski podprostor prostora V $\Rightarrow \forall \vec{v}, \vec{w} \in W\ \forall a \in \mathbb{R}$ $\vec{v}+\vec{w} \in W$; $a\vec{v} \in W$

Ako je W vektorski podprostor prostora V to znači da su zadovoljene 4 aksiome iz definicije vektorskog prostora pa iz prve aksiome $\Rightarrow$ $(V,+)$ Abelova grupa $\Rightarrow$ $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ $\vec{v}+\vec{w} \in V$ q.e.d.

Također iz definicije je definisano skalarno množenje pa je $\forall \vec{v} \in V\ \forall a \in \mathbb{R}$ $a\vec{v} \in W$ q.e.d.

„$\Leftarrow$": postavka zadatka: $W \subseteq V$
$\forall(\vec{v}, \vec{w} \in W)\ \forall(a \in \mathbb{R})$
$\vec{v}+\vec{w} \in W$ i $a\vec{v} \in W$ $\Rightarrow$ W vektorski podprostor prostora V

Pokažimo da W zadovoljava aksiome iz definicije

(I) sabiranje čini V Abelovom grupom
 (a) zatvorenost: iz postavke zadatka $\forall(\vec{v}, \vec{w} \in W)$ $\vec{v}+\vec{w} \in W$
 (b) asocijativnost: sabiranje u V je asocijativno pa kako je $W \subseteq V$ to je sabiranje u W asocijativno
 (c) neutralni element: ako za a uzmem nula iz pretpostavke zadatka imam $0\vec{v} \in W$ tj. $\vec{0} \in W$ za $\forall \vec{v}$.
 (d) inverzni element: ako za a uzmem $a=-1$ imamo $-1\vec{v} \in W$ iz pretpostavke zadatka pa $-\vec{v} \in W$
 (e) komutativnost: sabiranje u V je komutativno pa kako je $W \subseteq V$ to je sabiranje u W komutativno

Prema tome $(V,+)$ jest Abelova grupa

Aksiome (II), (III) i (IV) vrijede za vektorski prostor V a kako je $W \subseteq V$ (ili W je dio iz V) to ove aksiome vrijede i za W.

Prema tome: W vektorski podprostor prostora V.

Pokazati da je skup $\{\vec{0}\}$ podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$

Rj. Trebamo pokazati da vrijedi: $W \neq \emptyset$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$
$\forall(\vec{v}, \vec{w} \in \{\vec{0}\})\ \forall(\alpha \in \mathbb{R})$ $\vec{v}+\vec{w} \in \{\vec{0}\}$ i $\alpha\vec{v} \in \{\vec{0}\}$.

Jedini element koji možemo uzeti iz $\{\vec{0}\}$ je $\vec{0}$ pa je
$\vec{0}+\vec{0}=\vec{0} \in \{\vec{0}\}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha\vec{0}=\vec{0} \in \{0\}$ Prema tome $\{\vec{0}\}$ je podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Pokazati da je W podprostor od $\mathbb{R}^3$ gdje je $W=\{(a,b,c): a+b+c=0\}$ tj. W je sačinjen od onih vektora koji imaju osobinu da mu je suma komponenti jednak 0.

Rj. Trebamo pokazati da je W neprazan podskup od $\mathbb{R}^3$, i $\forall(\vec{v}, \vec{w} \in W)\ \forall(\alpha \in \mathbb{R})$ $\vec{v}+\vec{w} \in W$ i $\alpha\vec{v} \in W$.

W je neprazan (npr. $(1,-1,0) \in W$)
W je podskup od $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$).

Uzmimo dva vektora iz W, $\vec{v}, \vec{w} \in W$
$\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)$, $a_1+a_2+a_3=0$; $\vec{w}=(b_1,b_2,b_3)$, $b_1+b_2+b_3=0$.
$\vec{v}+\vec{w}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.
Kako je $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)=0$ to je
$\vec{v}+\vec{w} \in W$ q.e.d.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj,
$\alpha\vec{v}=\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$
kako je $\alpha a_1+\alpha a_2+\alpha a_3=\alpha(a_1+a_2+a_3)=0$ to je
$\alpha\vec{v} \in W$ q.e.d.

Prema tome W je podprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(#) $P(x)$ predstavlja vektorski prostor polinoma. Označimo sa $P_2(x)$ podskup od $P(x)$ koji sadrži sve polinome stepena ≤ 2 ($ax^2+bx+c \in P_2(x)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$). Pokazati da je $P_2(x)$ vektorski podprostor prostora $P(x)$.

Rj. Trebamo pokazati da je $P_2(x)$ neprazan podskup od $P(x)$ i da vrijedi $\forall (p(x), g(x) \in P_2(x))\ \forall (\alpha \in \mathbb{R})$ $p(x)+g(x) \in P_2(x)$
$\alpha p(x) \in P_2(x)$

$P_2(x)$ je neprazan (npr. $3x^2+2x-1 \in P_2(x)$)

$P_2(x)$ je podskup od $P(x)$ ($P(x) = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$)

Uzmimo dva polinoma iz $P_2(x)$ npr. $p(x), g(x) \in P_2(x)$

$$p(x)+g(x) = a_2x^2+a_1x+a_0 + b_2x^2+b_1x+b_0 = (a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+a_0+b_0$$

kako su $a_2+b_2,\ a_1+b_1,\ a_0+b_0 \in \mathbb{R}$ to $p(x)+g(x) \in P_2(x)$ q.e.d.

Uzmimo proizvoljno $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha p(x) = \alpha(a_2x^2+a_1x+a_0) = \alpha a_2 x^2 + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

tj. $\alpha p(x) \in P_2(x)$ q.e.d.

Prema tome $P_2(x)$ je vektorski podprostor prostora $P(x)$.

(#) Neka je V vektorski prostor svih kvadratnih $n\times n$ matrica nad skupom realnih brojeva. Pokazati da je W vektorski podprostor od V gdje:

a) W sadrži sve simetrične matrice tj. sve matrice $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ za koje $a_{ji}=a_{ij}$

b) W sadrži sve matrice koje komutiraju sa datom matricom T tj. $W=\{A \in V \mid AT=TA\}$.

Rj. a) Trebamo pokazati da je W neprazan podskup od V za koji vrijedi $\forall (A,B \in V)\ \forall(\alpha \in \mathbb{R})$ $A+B \in W$ i $\alpha A \in W$.

W je neprazan (npr. $\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix} \in W$).

W je podskup od V (W je skup svih simetričnih matrica dok je V skup svih kvadratnih matrica

Uzmimo dvije proizvoljne matrice $A, B \in W$

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ za koje $a_{ji}=a_{ij}$ i $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ za koje $b_{ji}=b_{ij}$.

$$A+B=[a_{ij}]_{n\times n}+[b_{ij}]_{n\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times n}$$

Kako su $a_{ij}=a_{ji}$ i $b_{ij}=b_{ji}$ to je $a_{ji}+b_{ji}=a_{ij}+b_{ij}$ pa je $A+B \in W$ q.e.d.

Uzmimo proizvoljni skalar $c \in \mathbb{R}$

$c\cdot A = c\cdot[a_{ij}]_{n\times n}=[ca_{ij}]_{n\times n}$, kako je $a_{ij}=a_{ji}$ to je i $ca_{ij}=ca_{ji}$ pa je i $cA \in W$ q.e.d.

Prema tome W je vektorski podprostor prostora V.

b) OVAJ DIO URADITI ZA VJEŽBU

Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija Neka je V vektorski prostor nad poljem F i neka je $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ uređen skup elemenata iz V. Linearna kombinacija od $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ je bilo koji vektor oblika $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$ gdje su $c_i \in F$.

(1.) Data su dva vektora u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ i $\vec{v}_2 = (1,2,0)$. Naći dva vektora $\vec{u}$ koja su linearna kombinacija vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$.

Rj. $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ gdje su $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\vec{u} = c_1(1,0,1) + c_2(1,2,0)$

$\vec{u} = (c_1 + c_2, 2c_2, c_1)$

Ako npr. uzmem $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ i $c_1 = -1$, $c_2 = -2$ imam

$\vec{u}_1 = (3,4,1)$ i $\vec{u}_2 = (-3,-4,-1)$ su vektori koji su linearne kombinacije vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$

$\vec{u}_2 = -\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$, $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

(2.) Data je matrična jednačina $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ izraziti kao linearnu kombinaciju kolona matrice A.

Rj. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 &= 3 \\ c_1 - 3c_2 &= -1 \quad /\cdot 2 \\ \hline 2c_1 - c_2 &= 3 \\ -\ \ 2c_1 - 6c_2 &= -2 \\ \hline 5c_2 &= 5 \\ c_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_1 - 3c_2 &= -1 \\ c_1 - 3 &= -1 \\ c_1 &= 2 \end{aligned}$$

Ako uvedem oznake $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ imam $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ izražen kao linearna kombinacija kolona matrice A

(3.) Odrediti vektor $\vec{a}$ koji je linearna kombinacija vektora $\vec{b} = (1,2,-3)$.

Rj. $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{a} = \alpha(1,2,-3)$.

Ako uzmemo $\alpha = -2$

$\vec{a} = (-2,-4,6)$ je linearna kombinacija vektora $\vec{b}$.

Definicija Skup svih vektora $\vec{w}$ koji su linearna kombinacija od $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ formiraju podprostor W prostora V koji zovemo podprostor generisan skupom $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Ovaj podprostor ćemo označavati sa span S gdje je $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$. Također kažemo da S rasprostire podprostor W.

(4.) Neka je S podskup vektora vektorskog prostora V, i neka je W podprostor od V. Ako je $S \subseteq W$ tada je span $S \subseteq W$.

Rj. W je vektorski podprostor. Na osnovu definicije znamo

$\forall(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W)\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W$ i $\forall(\vec{v}_1 \in W)\ \forall(\alpha \in F)\ \alpha\vec{v}_1 \in W$

F je neko polje (npr. $F = \mathbb{R}$)

Drugim riječima W je zatvoren pod operacijama sabiranja i skalarnog množenja.

$\text{span}\, S = \{\vec{w} \mid \vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \text{ gdje su } c_i \in F \text{ i } \vec{v}_i \in S\}$

Ako je $S \subseteq W$ tada je i svaki vektor $\vec{w} \in \text{span}\, S$ u W

pa je $\text{span}\, S \subseteq W$. q.e.d.

Definicija Linearna relacija među vektorima $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ je bilo koja relacija oblika $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ gdje su koeficijenti $c_i \in F$. Za uređen skup vektora $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ kažemo da su linearno nezavisni ako linearna relacija $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = 0$ vrijedi samo u slučaju kada je $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Skup vektora koji nije linearno nezavisan zovemo linearno zavisan.

Napomena: Iz definicije vidimo da ako je $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ linearno nezavisan skup tada iz jednakosti $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$ možemo zaključiti da $c_i = 0$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.

(5.) Ako je $\vec{v}_1 = \vec{0}$ pokazati da je skup od dva vektora $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linearno zavisan.

Rj. Posmatramo jednakost $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 = 0$.

Ako stavimo $c_1 = 1$ i $c_2 = 0$ imamo $\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ su linearno zavisni.

( ) Ispitati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(2,3,-4)$, $\vec{b}=(3,-2,0)$ i $\vec{c}=(0,1,1)$.

Rj. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$\alpha(2,3,-4)+\beta(3,-2,0)+\gamma(0,1,1)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} 2\alpha+3\beta &= 0 \\ 3\alpha-2\beta+\gamma &= 0 \\ -4\alpha+\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad \det M=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}=(-1)(4+21)=-25$$

$\det M\neq 0$

sistem ima samo trivijalna rješenja $((0,0,0))$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno nezavisni.

( ) Dokazati da su vektori $\vec{a}=(3,1,8)$, $\vec{b}=(3,4,5)$ i $\vec{c}=(2,3,3)$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$\alpha(3,1,8)+\beta(3,4,5)+\gamma(2,3,3)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} 3\alpha+3\beta+2\gamma &= 0 \\ \alpha+4\beta+3\gamma &= 0 \\ 8\alpha+5\beta+3\gamma &= 0 \end{aligned} \qquad \det M=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} \overset{I_v-II_v\cdot 3}{\underset{III_v-II_v\cdot 8}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & -9 & -7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -27 & -21 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -9 & -7 \\ -27 & -21 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-9)(-7)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$\det M=0$

$\text{rang}\, M<3$

Sistem ima netrivijalna rješenja

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni.

( )v Diskutovati linearnu zavisnost vektora $\vec{a}=(3,-8,2)$, $\vec{b}=(7,6,5)$ i $\vec{c}=(5,2,6-\lambda)$ u zavisnosti od parametra λ.

Rj. $\det M=182-74\lambda$

1° $\lambda=\frac{182}{74}$ vektori linearno zavisni

2° $\lambda\neq\frac{182}{74}$ vektori linearno nezavisni

8. Za koju vrijednost parametra ρ su vektori $\vec{a}_1=(\rho,-\rho^2,3)$, $\vec{a}_2=(\rho-2,1,1)$ i $\vec{a}_3=(-1,\rho^2+1,-1)$ linearno zavisni? Za najveću dobijenu vrijednost parametra ρ napisati vektor $\vec{a}_3$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_2$.

Rj. $\alpha\vec{a}_1+\beta\vec{a}_2+\gamma\vec{a}_3=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix} \rho & \rho-2 & -1 \\ -\rho^2 & 1 & \rho^2+1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det M=\begin{vmatrix} \rho & \rho-2 & -1 \\ -\rho^2 & 1 & \rho^2+1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{II_k+III_k}{\underset{I_k+III_k\cdot 3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} \rho-3 & \rho-3 & -1 \\ 2\rho^2+3 & \rho^2+2 & \rho^2+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\begin{vmatrix} \rho-3 & \rho-3 \\ 2\rho^2+3 & \rho^2+2 \end{vmatrix}=(-1)(\rho-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2\rho^2+3 & \rho^2+2 \end{vmatrix}=$$

$$=(\rho-3)(\rho^2+2-2\rho^2-3)\cdot(-1)=(-1)(\rho-3)(-\rho^2-1)=(\rho-3)(\rho^2+1)$$

Za $\rho=3$ vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ su linearno zavisni.

$\vec{a}_1=(3,-9,3)$, $\vec{a}_2=(1,1,1)$, $\vec{a}_3=(-1,10,-1)$

$\vec{a}_3=\lambda\vec{a}_1+\omega\vec{a}_2$

$(-1,10,-1)=\lambda(3,-9,3)+\omega(1,1,1)$

$\vec{a}_3=-\frac{11}{12}\vec{a}_1+\frac{21}{12}\vec{a}_2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 3\lambda+\omega &= -1 \\ -\,\;-9\lambda+\omega &= 10 \\ \hline 12\lambda &= -11 \\ \lambda &= -\tfrac{11}{12} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3\lambda+\omega &= -1 \\ \omega &= -1+\tfrac{33}{12} \\ \omega &= \tfrac{21}{12} \end{aligned}$$

9.v Dati su vektori $\vec{a}=(-1,-3,1)$, $\vec{b}=(\lambda,3,4)$ i $\vec{c}=(-5,-9,1)$. Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu linearno zavisni, pa izraziti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

10.v Dati su vektori $\vec{a}=(m^2+1,m,-2)$, $\vec{b}=(m^2,2,-m)$, $\vec{c}=(-2m-1,0,m+2)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. 9. $\lambda=6$

$\vec{a}=\frac{2}{13}\vec{b}+\frac{5}{13}\vec{c}$

10. $m\in\{-2,0,1,3\}$

$m=3$: $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Baza i dimenzije. Računanje sa bazama

Definicija Skup vektora $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ koji su linearno nezavisni i koji generišu vektorski prostor V zovemo baza.
Vektorski prostor V je konačno-dimenzionalan ako postoji neki konačno dimenzionalan skup vektora S koji generišu V.
Dimenzija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V je broj vektora u bazi. Dimenziju ćemo označavati sa $\dim V$.

\# Ako je skup $B=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ baza tada se svaki vektor $\vec{w}\in V$ može napisati na jedinstven način u obliku $\vec{w}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n$ gdje su $c_i\in F$.

Rj. Pretpostavimo da postoji neki vektor $\vec{w}\in V$ koji se može napisati kao linearna kombinacija na dva načina

$$\vec{w}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_n\vec{v}_n\ ;\quad \vec{w}=c_1'\vec{v}_1+c_2'\vec{v}_2+\dots+c_n'\vec{v}_n.$$

Tada $\vec{0}=\vec{w}-\vec{w}=(c_1-c_1')\vec{v}_1+(c_2-c_2')\vec{v}_2+\dots+(c_n-c_n')\vec{v}_n$.

Pa kako su $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ linearno nezavisni vektori $\Rightarrow$

$c_1-c_1'=0,\ c_2-c_2'=0,\ \dots,\ c_n-c_n'=0 \Rightarrow$ dvije navedene linearne kombinacije su iste.

Prema tome svaki vektor $\vec{w}$ se može napisati na jedinstven način q.e.d.

\# Date su dvije baze $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$; $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ gdje su $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{b}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ i $\vec{b}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. Dat je vektor $\vec{c}$ čije su koordinate $\vec{c}=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$ u odnosu na bazu $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$. Vektor $\vec{c}$ napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz baze $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ i pronaći koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$.

Rj. I način:
Kako su date koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ imamo $\vec{c}=3\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3$ ili drugačije napisano

$$\vec{c}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

Svaki vektor iz $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ se može napisati kao linearna kombinacija vektora iz $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$

$$\vec{a}_1=p_{11}\vec{b}_1+p_{21}\vec{b}_2+p_{31}\vec{b}_3$$
$$\vec{a}_2=p_{12}\vec{b}_1+p_{22}\vec{b}_2+p_{32}\vec{b}_3$$
$$\vec{a}_3=p_{13}\vec{b}_1+p_{23}\vec{b}_2+p_{33}\vec{b}_3$$

ili drugačije napisano

$$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot P=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{bmatrix}}_{P}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&3&0\\2&-1&1\end{bmatrix}}_{A}$$

prema tome

$$P=B^{-1}\cdot A$$

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}\cdot(B_{kof})^T$$

$$\det B=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}\overset{I+III}{=}\begin{vmatrix}3&2&0\\1&1&0\\2&0&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$$

$B_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1$ $\quad B_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&1\\0&-1\end{vmatrix}=2$ $\quad B_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$

$B_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=1$ $\quad B_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3$ $\quad B_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=1$

$B_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$ $\quad B_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}=4$ $\quad B_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=-1$

$$B_{kof}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\2&-3&4\\-1&1&-1\end{bmatrix},\quad (B_{kof})^T=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&-3&1\\-2&4&-1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\2&-4&1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\2&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&3&0\\2&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&8&0\\0&-9&-1\end{bmatrix}$$ matrica za promjenu baze

$$\vec{c}=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot\begin{bmatrix}1&-5&0\\0&8&0\\0&-9&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\begin{bmatrix}-2\\8\\-8\end{bmatrix}$$

$\vec{c}=\begin{bmatrix}-2\\8\\-8\end{bmatrix}$ su koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$.

II način:
Neka je $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ jedinična baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ tj. $\vec{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\vec{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. Tada je $\vec{a}_1=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}_2=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{a}_3=-\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}_1=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}_2=2\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{b}_3=\vec{i}-\vec{k}$.

$$\vec{c}=3\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3=(3,3,6)+(2,3,-1)-(-1,0,1)=(6,6,4)=6\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2+\gamma\vec{b}_3=\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\alpha+2\beta+\gamma&=6\\ \alpha+\beta&=6\\ 2\alpha-\gamma&=4\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}\alpha&=-2\\ \beta&=8\\ \gamma&=-8\end{aligned}$$

$\vec{c}=-2\vec{b}_1+8\vec{b}_2-8\vec{b}_3$ tražene koordinate vektora $\vec{c}$.

4. Dokazati da vektori $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(1,1,1)$ i $\vec{c}=(1,1,2)$ čine bazu vektorskog prostora E^3, pa naći koordinate vektora $\vec{x}=(6,9,14)$ u odnosu na tu bazu.

Rj. Provjerimo da li su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{bmatrix},\quad \det M=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{vmatrix}\xrightarrow[III_v-I_v]{II_v-I_v}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\2&0&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Sistem ima samo trivijalno rješenje, vektori su linearno nezavisni: Vektori čine bazu.

$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$(6,9,14)=\alpha(1,2,3)+\beta(1,1,1)+\gamma(1,1,2)$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=6 &(1)\\2\alpha+\beta+\gamma&=9 &(2)\\3\alpha+\beta+2\gamma&=14 &(3)\end{aligned}$$

$(1)-(2):\ -\alpha=-3$

$(3)-(2):\ \alpha+\gamma=5$

$\alpha=3,\ \gamma=2$

$\alpha+\beta+\gamma=6$

$3+\beta+2=6$

$\beta=1$

$\vec{x}=(3,1,2)$ su koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu E^3.

5. Za koju vrijednost parametra m vektori $\vec{a}=(m,1+m,1-m)$, $\vec{b}=(2m,1-m,1)$ i $\vec{c}=(-2m,m,2m+2)$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora?

Rj. Provjerimo da li su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{bmatrix},\quad \det M=\begin{vmatrix}m&2m&-2m\\1+m&1-m&m\\1-m&1&2m+2\end{vmatrix}\xrightarrow[III_k+I_k\cdot 2]{II_k+III_k}$$

$$=\begin{vmatrix}m&0&0\\1+m&1&3m+2\\1-m&2m+3&4\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}1&3m+2\\2m+3&4\end{vmatrix}=m\big(4-\overbrace{(3m+2)(2m+3)}^{6m^2+13m+6}\big)=$$

$$=m(4-6m^2-13m-6)=m(-6m^2-13m-2)=m\cdot(-6)(m+2)\left(m+\tfrac{1}{6}\right)$$

$D=169-48=121\quad x_{1,2}=\frac{13\mp 11}{-12}\quad x_1=-2\quad x_2=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$

Za $m\neq 0$, $m\neq -2$ i $m\neq -\frac{1}{6}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ čine bazu trodimenzionalnog vektorskog prostora.

6. Ako je $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ jedna baza vektorskog prostora V_3, dokazati da i vektori $\vec{b}_1=\vec{a}_1+3\vec{a}_2$, $\vec{b}_2=-5\vec{a}_1+\vec{a}_2+4\vec{a}_3$ i $\vec{b}_3=2\vec{a}_1+2\vec{a}_2+6\vec{a}_3$ takođe čine bazu prostora V_3 i izraziti vektor $\vec{c}=11\vec{a}_1+3\vec{a}_2+14\vec{a}_3$ preko vektora baze $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$.

Rj. $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ baza vektorskog prostora

$\vec{b}_1=(1,0,3)$, $\vec{b}_2=(-5,1,4)$, $\vec{b}_3=(2,2,6)$ koordinate vektora $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ i $\vec{b}_3$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$

Provjerimo da li su vektori $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ i $\vec{b}_3$ linearno zavisni.

$\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2+\gamma\vec{b}_3=\vec{0}$

$$M=\begin{bmatrix}1&-5&2\\0&1&2\\3&4&6\end{bmatrix},\quad \det M=\begin{vmatrix}1&-5&2\\0&1&2\\3&4&6\end{vmatrix}\xrightarrow{III_k-II_k\cdot 2}\begin{vmatrix}1&-5&12\\0&1&0\\3&4&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&12\\3&-2\end{vmatrix}=-38$$

$\det M\neq 0$. Vektori $\vec{b}_1,\vec{b}_2$ i $\vec{b}_3$ su linearno nezavisni, pa oni takođe čine bazu prostora V_3.

$\vec{c}=(11,3,14)$ koordinate vektora $\vec{c}$ u odnosu na bazu $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$

$\vec{c}=\alpha\vec{b}_1+\beta\vec{b}_2+\gamma\vec{b}_3$

$(11,3,14)=\alpha(1,0,3)+\beta(-5,1,4)+\gamma(2,2,6)$

$$\begin{aligned}\alpha-5\beta+2\gamma&=11 &(1)\\\beta+2\gamma&=3 &(2)\\3\alpha+4\beta+6\gamma&=14 &(3)\end{aligned}$$

$(1)-(2):\ \alpha-6\beta=8\quad (I)$

$(3)-(2)\cdot 3:\ 3\alpha+\beta=5\quad (II)$

$(I)+6\cdot(II):\ 19\alpha=38$

$\alpha=2$

$3\alpha+\beta=5$

$6+\beta=5$

$\beta=-1$

$\beta+2\gamma=3$

$-1+2\gamma=3$

$\gamma=2$

$\vec{c}=2\vec{b}_1-\vec{b}_2+2\vec{b}_3=(2,-1,2)$ vektor $\vec{c}$ izražen preko vektora baze $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$.

7. Date su dvije baze vektorskog prostora E^3 $B_1=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ i $B_2=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$ gdje su $\vec{a}_1=(1,1,2)$, $\vec{a}_2=(2,3,-1)$, $\vec{a}_3=(-1,0,1)$ i $\vec{b}_1=(1,1,2)$, $\vec{b}_2=(2,1,0)$ i $\vec{b}_3=(1,0,-1)$. Dat je vektor $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_1 $\vec{x}=(2,3,-4)$ odnosno $\vec{x}=2\vec{a}_1+3\vec{a}_2-4\vec{a}_3$. Odrediti koordinate vektora $\vec{x}$ u odnosu na bazu B_2.

Rj. $\vec{x}=(3,8,-7)$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(3m+3,\ 1,\ m+5)$, $\vec{b}=(3m-4,\ 3m-2,\ -2)$, $\vec{c}=(3-3m,\ 2-3m,\ 1)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoje skalari α, β, γ, bar jedan različit od nule, takvi da $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$.

$$\alpha(3m+3,\ 1,\ m+5)+\beta(3m-4,\ 3m-2,\ -2)+\gamma(3-3m,\ 2-3m,\ 1)=0$$

$$\begin{aligned}(3m+3)\alpha+(3m-4)\beta+(3-3m)\gamma&=0\\ \alpha+(3m-2)\beta+(2-3m)\gamma&=0\\ (m+5)\alpha-2\beta+\gamma&=0\end{aligned}$$

Ovaj (homogeni) sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}3m+3 & 3m-4 & 3-3m\\ 1 & 3m-2 & 2-3m\\ m+5 & -2 & 1\end{vmatrix} \overset{II_k+III_k}{=\!=} \begin{vmatrix}3m+3 & -1 & 3-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v-III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-2 & 0 & 2-3m\\ 1 & 0 & 2-3m\\ m+5 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2m-2 & 2-3m\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}\overset{I_v-II_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2m-3 & 0\\ 1 & 2-3m\end{vmatrix}$$

$$=(2m-3)(2-3m) \qquad D=0 \text{ akko } m=\frac{3}{2} \text{ ili } m=\frac{2}{3}$$

$\frac{3}{2}>\frac{2}{3} \Rightarrow m=\frac{3}{2}$: $\vec{a}=\left(\frac{9}{2}+3,\ 1,\ \frac{3}{2}+5\right)=\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)$

$\vec{b}=\left(\frac{9}{2}-4,\ \frac{9}{2}-2,\ -2\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)$ $\quad\vec{c}=\left(3-\frac{9}{2},\ 2-\frac{9}{2},\ 1\right)=\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\eta\vec{c}$ – razlaganje vektora $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Pronađimo vrijednosti μ i η.

$$\left(\frac{15}{2},\ 1,\ \frac{13}{2}\right)=\mu\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ -2\right)+\eta\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ 1\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu-\frac{3}{2}\eta&=\frac{15}{2}\\ \frac{5}{2}\mu-\frac{5}{2}\eta&=1\\ -2\mu+\eta&=\frac{13}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu=-\frac{69}{10},\ \eta=-\frac{73}{10}$ $\quad \vec{a}=\frac{-69\vec{b}-73\vec{c}}{10}$ $\quad$ sistem riješiti za vježbu

...

(#) Odrediti parametar λ tako da vektori $\vec{a}=\lambda\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\lambda\vec{j}$ i $\vec{c}=3\lambda\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ budu komplanarni pa za tako dobijeno λ razložiti vektor $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ uslov komplanarnosti.

$$\alpha(\lambda,1,4)+\beta(1,-2\lambda,0)+\gamma(3\lambda,-3,4)=(0,0,0)$$

$$\begin{aligned}\lambda\alpha+\beta+3\lambda\gamma&=0\\ \alpha-2\lambda\beta-3\gamma&=0\\ 4\alpha+4\gamma&=0\end{aligned}$$

sistem, α, β i γ su nepoznate

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 3\lambda\\ 1 & -2\lambda & -3\\ 4 & 0 & 4\end{vmatrix}\overset{III_k-I_k}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 2\lambda\\ 1 & -2\lambda & -4\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1 & 2\lambda\\ -2\lambda & -4\end{vmatrix}=4\cdot 2\begin{vmatrix}1 & 2\lambda\\ -\lambda & -2\end{vmatrix}=8\cdot 2\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ -\lambda & -1\end{vmatrix}$$

$$D=16(-1+\lambda^2)=16(\lambda^2-1)$$

Za $\lambda=\pm1$ imamo da je $D=0 \Rightarrow$ sistem ima beskonačno mnogo rješenja (za $\lambda=\pm1$).

Za $\lambda=\pm1$ vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni. Uzmimo da je $\lambda=1$:

$\vec{a}=(1,1,4)$, $\vec{b}=(1,-2,0)$, $\vec{c}=(3,-3,4)$

$\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$

$\alpha(1,-2,0)+\beta(3,-3,4)=(1,1,4)$

$$\begin{aligned}\alpha+3\beta&=1\\ -2\alpha-3\beta&=1\\ 4\beta&=4\end{aligned}\qquad \beta=1,\quad \alpha+3=1,\quad \alpha=-2$$

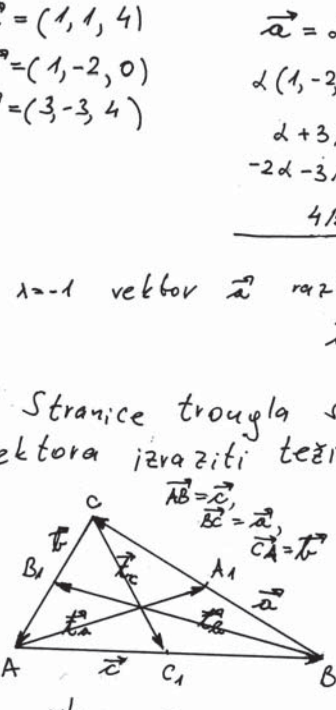
za $\lambda=1$: $\vec{a}=-2\vec{b}+\vec{c}$ razlaganje vektora $\vec{a}$ preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Za $\lambda=-1$ vektor $\vec{a}$ razložen preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}$$

(#) Stranice trougla su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Pomoću ovih vektora izraziti težišne linije trougla (vidi sliku).

Rj.



$\vec{AB}=\vec{c}$, $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$

Težišna linija je duž koja spaja tjeme trougla sa sredinom stranice nasprem tog tjemena.

$$\vec{t}_a=\vec{AA_1}=\vec{AB}+\vec{BA_1}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{t}_a=\vec{AA_1}=\vec{AC}+\vec{CA_1}=-\vec{CA}-\frac{1}{2}\vec{BC}=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

Za vježbu: $\vec{t}_b=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\quad\vec{t}_c=\vec{b}-\vec{c}=-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$

(#) Dati su vektori $\vec{a}=(m^2+1, m, -2)$, $\vec{b}=(m^2, 2, -m)$, $\vec{c}=(-2m-1, 0, m+2)$. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da ovi vektori budu linearno zavisni, pa za najveću dobijenu vrijednost parametra m napisati vektor $\vec{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

Rj. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako postoji bar jedan nenula skalar α, β ili γ takav da je

$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ tj.

$$\begin{aligned}(m^2+1)\alpha + m^2\beta + (-2m-1)\gamma &= 0\\ m\alpha + 2\beta + 0\gamma &= 0\\ -2\alpha + (-m)\beta + (m+2)\gamma &= 0\end{aligned}$$

Ovo je homogeni sistem. Za $D=0$ sistem ima netrivijalnih rješenja.

$$D=\begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} = -m\begin{vmatrix} m^2 & -2m-1\\ -m & m+2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} m^2+1 & -2m-1\\ -2 & m+2\end{vmatrix} =$$

$$= -m\left(m^3+2m^2-(2m^2+m)\right)+2\left(m^3+2m^2+m+2-(4m+2)\right) =$$

$$= -m(m^3-m)+2(m^3+2m^2-3m) = -m^2(m^2-1)+2m(m^2+2m-3) =$$

$D=4+12=16$, $m_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2}$, $m_1=\frac{-6}{2}=-3$, $m_2=\frac{2}{2}=1$

$$= m\left[-m(m-1)(m+1)+2(m-1)(m+3)\right] = m(m-1)\left[-m(m+1)+2(m+3)\right] =$$

$$= m(m-1)(-m^2-m+2m+6) = m(m-1)(-m+m+6) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$

$D=0$ akko $m=0$ ili $m=1$ ili $m=-2$ ili $m=3$

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno zavisni ako $m\in\{-2,0,1,3\}$

Za $m=3$: $\vec{a}=(10,3,-2)$, $\vec{b}=(9,2,-3)$ i $\vec{c}=(-7,0,5)$

$\vec{a}=\mu\vec{b}+\omega\vec{c}$

$(9\mu, 2\mu, -3\mu)+(-7\omega, 0, 5\omega)=(10,3,-2)$

$$\begin{aligned} 9\mu-7\omega&=10\\ 2\mu+0&=3\\ -3\mu+5\omega&=-2\end{aligned}$$

$\mu=\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{2}+5\omega=-2 \ /\cdot 2$

$-9+10\omega=-4$

$10\omega=5$

$\omega=\frac{1}{2}$

$\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

vektor $\vec{a}$ razložen preko vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Razvijmo determinantu D i na drugi način:

$$D=\begin{vmatrix} m^2+1 & m^2 & -2m-1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} \overset{I_R+III_R}{=} \begin{vmatrix} m^2-1 & m^2-m & -m+1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (m-1)(m+1) & m(m-1) & -(m-1)\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} m+1 & m & -1\\ m & 2 & 0\\ -2 & -m & m+2\end{vmatrix} \overset{I_k+III_k}{=}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} m & m & -1\\ m & 2 & 0\\ m & -m & m+2\end{vmatrix} = m(m-1)\begin{vmatrix} 1 & m & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -m & m+2\end{vmatrix} \overset{\substack{I_R-II_R\\ III_R-II_R}}{=}$$

$$= m(m-1)\begin{vmatrix} 0 & m-2 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & -m-2 & m+2\end{vmatrix} = -m(m-1)\begin{vmatrix} m-2 & -1\\ -(m+2) & m+2\end{vmatrix} = -m(m-1)(m+2)\begin{vmatrix} m-2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= -m(m-1)(m+2)(m-2-1) = -m(m-1)(m+2)(m-3)$$

Sopstveni vektori i sopstvene vrijednosti

U nastavku lekcije imaćemo dvije definicije:

(a) definiciju sopstvenog vektora i sopstvene vrijednosti za linearni operator T

(b) definiciju sopstvenog vektora i sopstvene vrijednosti za $n\times n$ matricu A.

U literaturi sopstveni vektor ima sljedeće nazive: karakteristični vektor, svojstveni vektor, eigenvector. Slično je i za svojstvenu vrijednost.

Definicija Posmatrajmo $n\times n$ matricu A. Nenula vektor $\vec{v}$ u $\mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor od A ako je

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Primjetite da ovaj skalar λ može biti nula (0). Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

Definicija Neka je $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ linearni operator. Nenula vektor $\vec{v}$ u $\mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor od T ako

$$T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Primjetite da skalar λ može biti nula. Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost koja odgovara svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

(#) Nađi sve karakteristične vektore i karakteristične vrijednosti jedinične matrice $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji, tražimo vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ takav da

$$I\cdot\vec{v}=\lambda\vec{v} \quad \text{za neki skalar } \lambda\in\mathbb{R},\ \vec{v}\neq\vec{0}.$$

$$I\cdot\vec{v}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} \qquad \lambda\cdot\vec{v}=\lambda\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\\\lambda v_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\\\lambda v_3\end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{matrix}v_1=\lambda v_1\\v_2=\lambda v_2\\v_3=\lambda v_3\end{matrix}$$

Karakteristični vektori su svi nenula vektori iz $\mathbb{R}^3$ i njima odgovara karakteristična vrijednost $\lambda=1$.

(#) Nađi svojstvene vrijednosti matrice $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\cdot\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$.

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}A\vec{v}&=\lambda\vec{v}\\A\vec{v}-\lambda\vec{v}&=\vec{0}\\(A-\lambda I)\vec{v}&=\vec{0} \quad \text{gdje je } I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on će imati netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-8=3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-8=\lambda^2-4\lambda-5$$
$$=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

Matrica A ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1=5$ i $\lambda_2=-1$.

(#) Nađi svojstvene vrijednosti matrice $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&2&3&4&5\\0&0&3&4&5\\0&0&0&4&5\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$, $\vec{v}\in\mathbb{R}^5$ tj. $\vec{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{bmatrix}$, $v_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,5}$

$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$
$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on ima netrivijalno rješenje akko je $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&3&4&5\\0&2-\lambda&3&4&5\\0&0&3-\lambda&4&5\\0&0&0&4-\lambda&5\\0&0&0&0&5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)=0$$

Svojstvene vrijednosti su 1, 2, 3, 4 i 5.

(#) Nađi svojstvene vrijednosti i svojstveni vektore matrice $A=\begin{bmatrix}0&5&8\\5&0&8\\8&5&0\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$

$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \quad \text{gdje je} \quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Homogeni sistem ima netrivijalna rješenja akko je $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&5&8\\5&-\lambda&8\\8&5&-\lambda\end{vmatrix} \overset{I_v+(II_v+III_v)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}13-\lambda&5&8\\13-\lambda&-\lambda&8\\13-\lambda&5&-\lambda\end{vmatrix}=(13-\lambda)\begin{vmatrix}1&5&8\\1&-\lambda&8\\1&5&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v-III_v}{=\!=\!=}(13-\lambda)\begin{vmatrix}0&0&\lambda+8\\1&-\lambda&8\\1&5&-\lambda\end{vmatrix}=(13-\lambda)(\lambda+8)\begin{vmatrix}1&-\lambda\\1&5\end{vmatrix}=(13-\lambda)(\lambda+8)(\lambda+5)$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=-8$ i $\lambda_3=13$.

Za $\lambda=-5$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}5&5&8\\5&5&8\\8&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned}5x_1+5x_2+8x_3&=0 \ (I)\\5x_1+5x_2+8x_3&=0 \ (II)\\8x_1+5x_2+5x_3&=0 \ (III)\end{aligned}$$

$(I)\equiv(II)$

$(II)-(III)$: $-3x_1+3x_2=0$

$x_1=x_2=t\in\mathbb{R}$ $\quad$ $8t+5x_2+5t=0$ $\quad$ $x_2=-\frac{13}{5}t$ $\quad$ t proizvoljan realan broj $\neq 0$

Svojstveni vektori $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}t\\-\frac{13}{5}t\\t\end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=-5$.

Za $\lambda=-8$ imamo

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \quad \begin{bmatrix}8&5&8\\5&8&8\\8&5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned}8x_1+5x_2+8x_3&=0 \ (1)\\5x_1+8x_2+8x_3&=0 \ (2)\\8x_1+5x_2+8x_3&=0 \ (3)\end{aligned}$$

$x_1=x_2=t$ $\quad$ $x_3=-\frac{13}{8}t$ $\quad$ Svojstveni vektori $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}t\\t\\-\frac{13}{8}t\end{bmatrix}$, $(t\neq 0)$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=-8$.

Za $\lambda=13$ imamo

$$\begin{bmatrix}-13&5&8\\5&-13&8\\8&5&-13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned}-13x_1+5x_2+8x_3&=0\\5x_1-13x_2+8x_3&=0\\8x_1+5x_2-13x_3&=0\end{aligned}$$

$x_1=x_2=t$, $x_3=t$ $\quad$ $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ za $\lambda_3=13$

(#) Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $B=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $B\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$.

$$B\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$

$(B-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad$ Ovaj sistem ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\det(B-\lambda I)=0$.

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-1\\-1&1-\lambda&1\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\-\lambda&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{III_v-I_v}{=\!=\!=}(-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\0&2&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ i $\lambda_3=2$.

$\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ svojstveni vektor.

$$(A-\lambda I)\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

Za $\lambda_1=0$:

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned}x_1-2x_2-x_3&=0\\-x_1+x_2+x_3&=0\\x_1-x_3&=0\end{aligned}$$

$x_1=x_3=t$, $t\in\mathbb{R}$, $x_2=0$ $\quad$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}t\\0\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=0$.

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

Za $\lambda_2=-1$:

$$\begin{bmatrix}2&-2&1\\-1&-2&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned}2x_1-2x_2+x_3&=0\\-x_1-2x_2+x_3&=0\\x_1&=0\end{aligned}$$

$x_2=t$, $x_3=-2t$, $x_1=0$

$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\t\\-2t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ svojstveni vektor kome odgovara svojstvena vrijednost $\lambda_2=-1$

Za $\lambda_3=2$ završiti za vježbu (rj. $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3t\\-2t\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$).

(#) Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica: a) $C=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$; b) $D=\begin{bmatrix}5&6&1\\6&5&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

Rješenje: a) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. b) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-1$ i $\lambda_3=11$

Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.
$\left(\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},\ v_i \in R,\ \vec{v} \neq \vec{0}\right)$

$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ Ovo je homogeni sistem, ima netrivijalna rješenja akko je $\det|A-\lambda I| = \vec{0}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -7-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v + II_v}{=\!=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(1-\lambda)(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-7-\lambda+6) = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$

Za $\lambda_1 = -3$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$
$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$6x_1 + 4x_2 = 0$ I
$-6x_1 - 4x_2 = 0$ II
$-x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ III

$6x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{6}x_2$
$x_1 = -\frac{2}{3}x_2$

III $\Rightarrow$ $+\frac{2}{3}x_2 - x_2 + 4x_3 = 0$

$4x_3 = \frac{1}{3}x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{12}x_2$

Svojstveni vektor $\vec{v_1} = \left(-\frac{2}{3}t, t, \frac{1}{12}t\right)$, $t \neq 0, t \in R$ koji odgovara svojs. vr. λ_1

Za $\lambda_2 = -1$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$
$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$4x_1 + 4x_2 = 0$ (1)
$-6x_1 - 6x_2 = 0$ (2)
$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ (3)

$x_1 = -x_2$

(3) $\Rightarrow$ $x_2 - x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = 0$ Svojstveni vektor $\vec{v_2} = (-t, t, 0)$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -1$. ($t \neq 0$, $t \in R$)

Za $\lambda_3 = 1$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$2x_1 + 4x_2 = 0$ (a)
$-6x_1 - 8x_2 = 0$ (b)
$-x_1 - x_2 = 0$ (c)

(c) $\Rightarrow$ $x_1 = -x_2$

Jedino rješenje ovog sistema je $x_1 = x_2 = 0$

$x_3 \in R$ je proizvoljan broj.

Svojstveni vektor $\vec{v_3} = (0, 0, t)$, $t \in R$, $t \neq 0$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_3 = 1$.

Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$
$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ homogeni sistem

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v + II_v}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{II_k - I_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(35 - 12\lambda + \lambda^2 - 1) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 34)$$

$D = 144 - 136$
$D = 8$
$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)(\lambda - 6 + \sqrt{2})(\lambda - 6 - \sqrt{2})$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6-\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 6+\sqrt{2}$.

Za $\lambda_1 = 4$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $x_i \in R$, $\vec{v} \neq \vec{0}$
$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (I)
$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ (II)
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ (III)

(II) + (III): $4x_2 + 2x_3 = 0$ /:2
$x_3 = -2x_2$

(I) $\Rightarrow$ $x_1 = 2x_2 + (-2x_2) = 0$

Karakteristični vektor $\vec{v_1} = (0, t, -2t)$, $t \neq 0$, $t \in R$ koji odgovara $\lambda_1 = 4$

Za $\lambda_2 = 6-\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$
$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & -2 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(\sqrt{2}-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (1)
$-x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$ (2)
$x_1 + 2x_2 + (\sqrt{2}-1)x_3 = 0$ (3)

(2)+(3): $(2+\sqrt{2})x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0$

$x_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)x_2$

$x_3 = (-\sqrt{2}-1)x_2 = (-1)(\sqrt{2}+1)x_2$

(1) $\Rightarrow$ $(\sqrt{2}-1)x_1 = 2x_2 + x_3 = 2x_2 - (\sqrt{2}+1)x_2 = (1-\sqrt{2})x_2 = -(\sqrt{2}-1)x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_2} = (-t, t, (-1)(\sqrt{2}+1)t)$ koji odgovara kar. vr. $\lambda_2 = 6-\sqrt{2}$

Za $\lambda_3 = 6+\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$
$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -2 & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(-1)(1+\sqrt{2})x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (I)
$-x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$ (II)
$x_1 + 2x_2 - (1+\sqrt{2})x_3 = 0$ (III)

(I)+(II): $-(2+\sqrt{2})x_1 - (2+\sqrt{2})x_2 = 0$
$x_1 = -x_2$

(III) $\Rightarrow$ $x_2 - (1+\sqrt{2})x_3 = 0$

$x_3 = \frac{x_2}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = (-1)(1-\sqrt{2})x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_3} = (-t, t, (-1)(1-\sqrt{2})t)$ koji odgovara kar. vr. $\lambda_3 = 6+\sqrt{2}$.

Minimalni polinom matrice

Posmatrajmo polinom $f(x)$ nad poljem K, recimo

$$f(x)=a_n x^n+\dots+a_1x+a_0$$

Ako je A kvadratna matrica nad K, tada definišemo

$$f(A)=a_nA^n+\dots+a_1A+a_0I$$

gdje je I jedinična matrica.
Kažemo da je A korijen ili nula polinoma $f(x)$ ako je $f(A)=0$.

(1.) Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$. Izračunati $f(A)$ ako je:

a) $f(x)=2x^2-3x+7$

b) $f(t)=t^2-5t-2$

Rj. a) $f(A)=2A^2-3A+7I=2\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$

$$=2\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6\\9&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7&0\\0&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&14\\21&39\end{bmatrix}$$

b)

$$f(A)=A^2-5A-2I=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}^2-5\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Prema tome A je nula polinoma $f(t)=t^2-5t-2$.

(2.)ˇ Data je matrica $A=\begin{bmatrix}1&-2\\4&5\end{bmatrix}$. Izračunati $f(A)$ ako je

a) $f(t)=t^2-3t+7$

b) $f(x)=x^2-6x+13$

Rješenja: a) $f(A)=\begin{bmatrix}-3&-6\\12&9\end{bmatrix}$ b) $f(A)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

Definicija Karakteristični polinom matrice A je polinom oblika $k(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

Teorema (Cayley-Hamilton) $k(A)=0$ (svaka matrica je nula svog karakterističnog polinoma)

(3.) Odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}$. Izračunati $k(B)$.

Rj. $k(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-6=\lambda^2-3\lambda-4$

Prema Cayley-Hamilton teoremi predviđamo da je B nula polinoma $k(\lambda)=\lambda^2-3\lambda-4$.

$$k(B)=B^2-3B-4I=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7&6\\9&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&6\\9&6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

(4.) Slične matrice imaju isti karakteristični polinom. Dokazati.

Rj. Neka su A i B slične matrice. Pokažimo da je $k_A(\lambda)=k_B(\lambda)$ tj. $\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-B)$.
Kako su A i B slične matrice to postoji invertibilna matrica P taka da je $B=P^{-1}AP$ (ovo je dokazano na predavanjima)

$$\lambda I=\lambda(P^{-1}IP)=P^{-1}(\lambda I)P$$

$$\det(\lambda I-B)=\det(P^{-1}\lambda IP-P^{-1}AP)=$$

$$=\det(P^{-1}(\lambda I-A)P)=\det(P^{-1})\det(\lambda I-A)\cdot\det(P)$$

Kako su determinante skalari i važi komutativnost i s obzirom da je $\det(P^{-1})\det(P)=1$ imamo

$$\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-B)$$

q.e.d.

(5.)ˇ Odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice $A=\begin{bmatrix}1&6&-2\\-3&2&0\\0&3&-4\end{bmatrix}$. Izračunati $k(A)$.

Rj. $k(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-8\lambda+62$.

Monic (normirani) polinom je polinom oblika $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ kod koga koeficijent najvećeg stepena ima vrijednost 1.

<u>Definicija</u> Neka je A n-kvadratna matrica nad poljem K i neka $\mathcal{M}(A)$ predstavlja familiju svih normiranih polinoma $f(t)$ za koje vrijedi $f(A)=0$. Monic polinom $m(t)$ najmanjeg stepena u $\mathcal{M}(A)$ nazivamo minimalni polinom od A.

<u>Teorem</u> Minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice A djeli svaki polinom koji ima A kao nulu. Konkretno $m(\lambda)$ djeli karakteristični polinom $k(\lambda)$ od A.

<u>Teorem</u> Karakteristični i minimalni polinomi matrice A imaju iste nesvodljivi faktore.

<u>Teorem</u> Skalar λ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je λ korijen minimalnog polinoma matrice A.

6. Odrediti minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -15 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Rj. Prvo ćemo odrediti karakterističan polinom $k(\lambda)$ matrice A.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 5 \\ -3 & \lambda-7 & 15 \\ -1 & -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 5 \\ \lambda+5 & \lambda-7 & 15 \\ \lambda+1 & -2 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{III_v-I_v}{=\!=\!=}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 5 \\ \lambda+5 & \lambda-7 & 15 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ \lambda+5 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\Big[\overbrace{(\lambda+1)(\lambda-7)+2(\lambda+5)}^{\lambda^2-6\lambda-7+2\lambda+10}\Big] =$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+3)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-3)=(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Minimalni polinom $m(\lambda)$ mora djeliti $k(\lambda)$. Također, svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$, tj. $\lambda-1$ i $\lambda-3$, su također faktori od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ je tačno jedan od sljedećih:

$f(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1)$ ili $g(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-1)^2$

Prema Cayley-Hamilton teoremi znamo da je $g(A)=k(A)=0$. Dovoljno je samo testirati $f(\lambda)$. Imamo:

$$f(A)=(A-I)(A-3I)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -15 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prema tome $f(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)=\lambda^2-4\lambda+3$ je minimalni polinom matrice A.

7. Naći minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Rj. Prvo ćemo odrediti karakteristični polinom $k(\lambda)$ matrice A.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 & -2 \\ 5 & \lambda-7 & 5 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{II_k+III_k}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ 5 & \lambda-2 & 5 \\ 6 & \lambda-2 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=\!=\!=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{II_v+I_v}{=\!=\!=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-2)$$

$$k(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$$

Minimalni polinom $m(\lambda)$ djeli $k(\lambda)$. Svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ (u našem slučaju $\lambda-2$ i $\lambda-3$) je također faktor od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ je tačno jedan od sljedeća dva polinoma:

$f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$ i $g(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$

$$f(A)=(A-2I)(A-3I)=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -5 \\ -6 & 6 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Minimalni polinom matrice A je $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)=\lambda^2-5\lambda+6$

8.v Naći minimalne polinome $m(\lambda)$ matrica:

a) $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

(#) Minimalni polinom $m(t)$ matrice A dijeli svaki polinom $f(t)$ kadgod je $f(A)=0$.

R: Pretpostavimo da je $f(t)$ polinom za koji $f(A)=0$. Neka je $m(t)$ minimalni polinom matrice A. Prema algoritmu dijeljenja za polinome postoji polinom $g(t)$ i $r(t)$ za koji važi

$$f(t)=m(t)g(t)+r(t) \quad ; \quad r(t)=0 \text{ ili } stepen(r(t))<stepen(m(t))$$

Ako stavimo da je $t=A$ u ovu jednakost, i iskoristimo činjenice da je $f(A)=0$ i $m(A)=0$ dobićemo da je $r(A)=0$.

Ako bi bilo da je $r(t)\neq 0$ tada je $r(t)$ polinom stepena manjeg nego $m(t)$ koji ima A kao nulu, što je kontradikcija sa definicijom minimalnog polinoma. Prema tome $r(t)=0$ pa time $f(t)=m(t)g(t)$ tj.

$m(t)$ dijeli $f(t)$ kadgod je $f(A)=0$

q.e.d.

(#)ˇ Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$. Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

(#)ˇ Neka je A n-kvadratna matrica za koju je $A^k=0$ za neko $k>n$. Pokazati da $A^n=0$.

(#)ˇ Pokazati da matrica A i njezina transponovana matrica A^T imaju isti minimalni polinom.

(#)ˇ Pokazati da A je skalarna matrica kI ako i samo ako minimalni polinom od A je $m(\lambda)=\lambda-k$.

(#) Neka je $m(\lambda)$ minimalni polinom n-kvadratne matrice A.

a) Pokazati da karakterističan polinom matrice A dijeli $(m(\lambda))^n$.

b) Dokazati da $m(\lambda)$ i $k(\lambda)$ imaju iste nesvodljive faktore

R: a) Neka je minimalni polinom matrice A

$m(\lambda)=\lambda^r-c_1\lambda^{r-1}+\ldots+c_{r-1}\lambda+c_r$. Posmatrajmo sljedeće matrice

$$B_0=I$$
$$B_1=A+c_1I$$
$$B_2=A^2+c_1A+c_2I$$
$$\ldots$$
$$B_{r-1}=A^{r-1}+c_1A^{r-1}+\ldots+c_{r-1}I$$

Tada

$$B_0=I$$
$$B_1-AB_0=B_1-A=c_1I$$
$$B_2-AB_1=B_2-A^2-c_1A=c_2I$$
$$\ldots$$
$$B_{r-1}-AB_{r-2}=c_{r-1}I$$

Također $B_r-AB_{r-1}=c_rI$

$$-AB_{r-1}=c_rI-B_r=c_rI-(A^r+c_1A^{r-1}+\ldots+c_{r-1}A+c_rI)=$$
$$=c_rI-m(A)=rI$$

Stavimo $B(\lambda)=\lambda^{r-1}B_0+\lambda^{r-2}B_1+\ldots+\lambda B_{r-2}+B_{r-1}$. Tada

$$(\lambda I-A)\cdot B(\lambda)=\lambda B(\lambda)-A\cdot B(\lambda)=$$
$$=(\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}B_1+\ldots+\lambda B_{r-1})-(\lambda^{r-1}AB_0+\lambda^{r-2}AB_1+\ldots+AB_{r-1})$$
$$=\lambda^rB_0+\lambda^{r-1}(B_1-AB_0)+\lambda^{r-2}(B_2-AB_1)+\ldots+\lambda(B_{r-1}-AB_{r-2})-AB_{r-1}$$
$$=\lambda^rI+c_1\lambda^{r-1}I+c_2\lambda^{r-2}I+\ldots+c_{r-1}\lambda I+c_r\lambda=m(\lambda)I$$

Ako stavimo determinante na obe strane jednakosti imamo

$$\det(\lambda I-A)\cdot\det(B(\lambda))=\det(m(\lambda)I)=(m(\lambda))^n.$$

Kako je $\det(B(\lambda))$ polinom $\det(\lambda I-A)$ dijeli $(m(\lambda))^n$ tj. karakteristični polinom od A dijeli $(m(\lambda))^n$.

q.e.d.

b) Pretpostavimo da je $f(\lambda)$ nesvodljivi polinom. Ako $f(\lambda)$ dijeli $m(\lambda)$ tada, kako $m(\lambda)$ dijeli $k(\lambda)$, $f(\lambda)$ dijeli $k(\lambda)$. Sa druge strane ako $f(\lambda)$ dijeli $k(\lambda)$ tada prema djelu a), $f(\lambda)$ dijeli $(m(\lambda))^n$. Ali $f(\lambda)$ je nesvodljiv pa $f(\lambda)$ također dijeli $m(\lambda)$.

Prema tome $m(\lambda)$ i $k(\lambda)$ imaju iste nesvodljive faktore.

Symbols

Special sets

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{B}^n$
$\mathfrak{M}_{m,n}$ [$m \times n$ matrices]
$\mathbb{N}$ [integers ≥ 0]
$\mathbb{P}$ [positive integers]
$\mathbb{Q}$ [rationals]
$\mathbb{R}$ [real numbers]
Σ^*, Σ
$\mathbb{Z}$ [all integers]
$\mathbb{Z}(p)$, $[n]_p$
$[a, b]$, (a, b), etc.

Set notation

$a \in A$, $a \notin A$
A^c [complement]
$A \setminus B$
$A \cup B$ [union]
$A \cap B$ [intersection]
$A \oplus B$ [symmetric difference]
$\mathcal{P}(S)$ [power set]
(s, t), $(s_1, \ldots, s_n)$
$S \times T$, $S^2 = S \times S$
$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, S^n
$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$, $\bigcup_{k=0}^{m} A_k$, etc.
$T \subseteq S$
$T \subset S$
$\emptyset$ [empty set]

Functions

χ_A [characteristic function]
$\mathrm{Dom}(f)$ [domain of f]
$f \circ g$ [composition]
$f(A)$
$f: S \to T$
f^{-1} [inverse function]
$f^{\leftarrow}(B)$, $f^{\leftarrow}(y)$
$\mathrm{FUN}(S, T)$
$\mathrm{Graph}(f)$
$\mathrm{Im}(f)$ [image of f]
$\log x$, $\ln x$
(s_n) [sequence]

Σ^*

λ [empty word or list]
$\mathrm{length}(w)$
Σ [alphabet]
Σ^* [words]
Σ^k [words of length k]
$\overleftarrow{w}$ [reversal]

Miscellany

$a := b$
$\lfloor a \rfloor$ [floor]
$\lceil a \rceil$ [ceiling]
$n!$ [factorial]
$|x|$ [absolute value]
$a | b$ [a divides b]
$m \equiv n \pmod{p}$
$m +_p n$, $m *_p n$
$m * n$ [product]
$m \wedge n$ [m^n]
$n \text{ DIV } p$, $n \text{ MOD } p$
$\gcd(m, n)$
$\mathrm{lcm}(m, n)$
$\max\{a, b\}$
$\min\{a, b\}$
$O(n^2)$, $O(n \log n)$, etc.
$\Theta(n^2)$, $\Theta(n \log n)$, etc.
$\prod$ [product]
$\sum$ [sum]
∞, $-\infty$
$\blacksquare$

Logic

$\neg p$ [negation]
$p | q$ [Sheffer stroke]
$p \wedge q$, $p \vee q$ [and, or]
$p \to q$ [implication]
$P \Longrightarrow Q$
$p \leftrightarrow q$ [biconditional]
$P \Longleftrightarrow Q$
$p \oplus q$ [exclusive or]
$\mathbf{1}$ [tautology]
$\mathbf{0}$ [contradiction]
$\forall$, $\exists$
$\exists!$
$\therefore$

Matrices

$\mathbf{A} = [a_{jk}]$
$\mathbf{A}[j,k] = a_{jk}$
$\mathbf{A}^{-1}$ [inverse of $\mathbf{A}$]
$\mathbf{A}^T$ [transpose of $\mathbf{A}$]
$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ [sum]
$\mathbf{AB}$ [product]
$\mathbf{A}_1 * \mathbf{A}_2$ [Boolean product]
$c\mathbf{A}$ [scalar product]
$-\mathbf{A}$ [negative of $\mathbf{A}$]
$\mathbf{I}_n$ [$n \times n$ identity matrix]
$\mathbf{M}_R$
$\mathfrak{M}_{m,n}$ [$m \times n$ matrices]
$\mathbf{0}$ [zero matrix]

Relations

R_f [for a function f]
$R^{\leftarrow}$ [converse relation]
$f^{\leftarrow}$ [as a relation]
$\sim$ [equivalence]
$[s]$ [equivalence class]
$[S]$
$\preceq$, $\prec$, $(S,\preceq)$
$\max(S)$, $\min(S)$
$\text{lub}(S)$, $\text{glb}(S)$
$x \vee y$, $x \wedge y$
$\text{FUN}(S,T)$
$\preceq$ [on $\text{FUN}(S,T)$]
$\preceq^k$ [filing order]
$\preceq_{LL}$ [lenlex order]
$\preceq_L$ [lexicographic order]
E [equality relation]
$R_1R_2 = R_2 \circ R_1$
$\mathbf{A}_1 * \mathbf{A}_2$ [Boolean product]
R^n, R^0
$\mathbf{A}_1 \leq \mathbf{A}_2$ [Boolean matrices]
$\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$
$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
$\mathbf{r}(\mathbf{A})$, $\mathbf{s}(\mathbf{A})$, $\mathbf{t}(\mathbf{A})$

Algebraic Systems

$x \vee y$, $x \wedge y$
x' [complement]
$x \leq y$
0, 1
$\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^n$
$\text{BOOL}(n)$ [Boolean functions]
$\text{PERM}(X)$ [permutations]
S_n [symmetric group]
$\langle g \rangle$, $\langle A \rangle$ [group generated]
$G(x) = \{g(x) : g \in G\}$ [orbit]
$\text{AUT}(D)$ [automorphisms]
$\text{FIX}_G(x) = \{g \in G : g(x) = x\}$
$\text{FIX}_X(g) = \{x \in X : g(x) = x\}$
$C(k)$ [colorings]
g^*
g^{-1} [inverse of g]
gH, Hg [cosets]
G/H [left cosets]
A^+ [semigroup generated]
R/I [as a ring]

Graphs and trees

$V(G)$, $E(G)$
$\deg(v)$, $\text{indeg}(v)$, etc.
$D_k(G)$
F [float time]
$G \setminus \{e\}$
$G \simeq H$ [isomorphic graphs]
K_n [complete graph]
$K_{m,n}$
M [max-weight]
$\mathbf{M}_R$
$R(v)$
$\text{SUCC}(v)$, $\text{ACC}(v)$
T_r, T_v [rooted trees]
W [weight]
W^* [min-weight]
$W(G)$ [weight of graph]
$W(T)$ [weight of tree]

Counting and probability

$\binom{n}{r}$
$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k}$
$P(n,r)$
$|S|$
Ω [sample space]
$E(X) = \mu$ [expectation]
F_X [cdf]
$P(E)$ [probability of E]
$P(E|S)$ [conditional probability]
$P(X = 2)$, etc.
σ [standard deviation]
$V(X) = \sigma^2$
$\widetilde{X}$, $\widetilde{F}$ [normalizations]
Φ [Gaussian normal]

Some Special Sets

1. List five elements in each of the following sets.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is divisible by } 5\}$

(b) $\{2n+1 : n \in \mathbb{P}\}$

(c) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

(d) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

(e) $\{1/n : n \in \mathbb{P}\}$

(f) $\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < 1\}$

(g) $\{n \in \mathbb{N} : n+1 \text{ is prime}\}$

2. List the elements in the following sets.

(a) $\{1/n : n = 1, 2, 3, 4\}$

(b) $\{n^2 - n : n = 0, 1, 2, 3, 4\}$

(c) $\{1/n^2 : n \in \mathbb{P},\ n \text{ is even and } n < 11\}$

(d) $\{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$

3. List five elements in each of the following sets.

(a) Σ^* where $\Sigma = \{a, b, c\}$

(b) $\{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) \leq 2\}$ where $\Sigma = \{a, b\}$

(c) $\{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) = 4\}$ where $\Sigma = \{a, b\}$

Which sets above contain the empty word λ?

4. Determine the following sets, i.e., list their elements if they are nonempty, and write $\emptyset$ if they are empty.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 9\}$ (b) $\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$ (d) $\{n \in \mathbb{N} : 3 < n < 7\}$

(e) $\{n \in \mathbb{Z} : 3 < |n| < 7\}$ (f) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\}$

5. Repeat Exercise 4 for the following sets.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ and } x \geq 2\}$

(d) $\{3n+1 : n \in \mathbb{N} \text{ and } n \leq 6\}$

(e) $\{n \in \mathbb{P} : n \text{ is prime and } n \leq 15\}$ [Remember, 1 isn't prime.]

6. Repeat Exercise 4 for the following sets.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n|12\}$ (b) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 = 0\}$

(c) $\{n \in \mathbb{N} : \lfloor \frac{n}{3} \rfloor = 8\}$ (d) $\{n \in \mathbb{N} : \lceil \frac{n}{2} \rceil = 8\}$

7. Let $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Determine the following sets, i.e., list their elements if they are nonempty, and write $\emptyset$ if they are empty.

(a) $\{n \in A : 4|n\}$

(b) $\{n \in A : n|4\}$

(c) $\{n \in A : \max\{n, 4\} = 4\}$

(d) $\{n \in A : \max\{n, 14\} = n\}$

8. How many elements are there in the following sets? Write ∞ if the set is infinite.

(a) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2\}$

(b) $\{n \in \mathbb{Z} : 0 \leq n \leq 73\}$

(c) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \leq |n| \leq 73\}$

(d) $\{n \in \mathbb{Z} : 5 < n < 73\}$

(e) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even and } |n| \leq 73\}$

(f) $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 73\}$

(g) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\}$

9. Repeat Exercise 8 for the following sets.

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 0.99 < x < 1.00\}$

(b) $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$

(c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(d) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is even}\}$

(e) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is prime}\}$

(f) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is even and prime}\}$

(g) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is even or prime}\}$

10. How many elements are there in the following sets? Write ∞ if the set is infinite.

(a) $\{-1, 1\}$ (b) $[-1, 1]$

(c) $(-1, 1)$ (d) $\{n \in \mathbb{Z} : -1 \leq n \leq 1\}$

(e) Σ^* where $\Sigma = \{a, b, c\}$

(f) $\{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) \leq 4\}$ where $\Sigma = \{a, b, c\}$

11. Consider the sets

$A = \{n \in \mathbb{P} : n \text{ is odd}\}$

$B = \{n \in \mathbb{P} : n \text{ is prime}\}$

$C = \{4n + 3 : n \in \mathbb{P}\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 15 = 0\}$

Which of these sets are subsets of which? Consider all 16 possibilities.

12. Consider the sets $\{0, 1\}$, $(0, 1)$ and $[0, 1]$. True or False.

(a) $\{0, 1\} \subseteq (0, 1)$ (b) $\{0, 1\} \subseteq [0, 1]$

(c) $(0, 1) \subseteq [0, 1]$ (d) $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$

(e) $[0, 1] \subseteq \mathbb{Z}$ (f) $[0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$

(g) $1/2$ and $\pi/4$ are in $\{0, 1\}$

(h) $1/2$ and $\pi/4$ are in $(0, 1)$

(i) $1/2$ and $\pi/4$ are in $[0, 1]$

13. Consider the following three alphabets: $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Sigma_2 = \{a, b, ca\}$, and $\Sigma_3 = \{a, b, Ab\}$. Determine to which of Σ_1^*, Σ_2^*, and Σ_3^* each word below belongs, and give its length as a member of each set to which it belongs.

(a) aba (b) bAb (c) cba

(d) cab (e) $caab$ (f) $baAb$

14. Here is a question to think about. Let $\Sigma = \{a, b\}$ and imagine, if you can, a dictionary for all the nonempty words of Σ^* with the words arranged in the usual alphabetical order. All the words a, aa, aaa, $aaaa$, etc., must appear before the word ba. How far into the dictionary will you have to dig to find the word ba? How would the answer change if the dictionary contained only those words in Σ^* of length 5 or less?

15. Suppose that w is a nonempty word in Σ^*.

(a) If the first [i.e., leftmost] letter of w is deleted, is the resulting string in Σ^*?

(b) How about deleting letters from both ends of w? Are the resulting strings still in Σ^*?

(c) If you had a device that could recognize letters in Σ and could delete letters from strings, how could you use it to determine if an arbitrary string of symbols is in Σ^*?

Answers

1. (a) 0, 5, 10, 15, 20, say. (c) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{5\}$, say.
(e) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/73, say. (g) 1, 2, 4, 16, 18, say.

3. (a) λ, a, ab, cab, ba, say. (c) $aaaa$, $aaab$, $aabb$, etc.
The sets in parts (a) and (b) contain the empty word λ.

5. (a) $\emptyset$. (c) $\emptyset$. (e) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.

7. (a) $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$. (c) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

9. (a) ∞. (c) ∞. (e) ∞. (g) ∞.

11. $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, C is a subset of A, and C, D are subsets of A, B, and D.

13. (a) aba is in all three and has length 3 in each.
(c) cba is in Σ_1^* and length$(cba) = 3$.
(e) $caab$ is in Σ_1^* with length 4 and is in Σ_2^* with length 3.

15. (a) Yes.
(c) Delete first letters from the string until no longer possible. If λ is reached, the original string is in Σ^*. Otherwise, it isn't.

Set Operations

1. Let $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$, and $D = \{2, 4, 8\}$. Determine the sets
   (a) $A \cup B$ (b) $A \cap C$ (c) $(A \cup B) \cap C^c$
   (d) $A \setminus B$ (e) $C \setminus D$ (f) $B \oplus D$
   (g) How many subsets of C are there?
2. Let $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{n \in \mathbb{P} : n \text{ is even}\}$, and $C = \{n \in \mathbb{P} : n \text{ is odd}\}$.
   (a) Determine $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, and $B \oplus C$.
   (b) List all subsets of A.
   (c) Which of the following sets are infinite? $A \oplus B$, $A \oplus C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$.
3. In this exercise the universe is $\mathbb{R}$. Determine the following sets.
   (a) $[0, 3] \cap [2, 6]$ (b) $[0, 3] \cup [2, 6]$ (c) $[0, 3] \setminus [2, 6]$
   (d) $[0, 3] \oplus [2, 6]$ (e) $[0, 3]^c$ (f) $[0, 3] \cap \varnothing$
   (g) $[0, \infty) \cap \mathbb{Z}$ (h) $[0, \infty) \cap (-\infty, 2]$
   (i) $([0, \infty) \cup (-\infty, 2])^c$
4. Let $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{a, b, aa, bb, aaa, bbb\}$, $B = \{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) \geq 2\}$, and $C = \{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) \leq 2\}$.
   (a) Determine $A \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, and $A \oplus C$.
   (b) Determine $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$, and $B \setminus A$.
   (c) Determine $\Sigma^* \setminus B$, $\Sigma \setminus B$, and $\Sigma \setminus C$.
   (d) List all subsets of Σ.
   (e) How many sets are there in $\mathcal{P}(\Sigma)$?
5. In this exercise the universe is Σ^*, where $\Sigma = \{a, b\}$. Let A, B, and C be as in Exercise 4. Determine the following sets.
   (a) $B^c \cap C^c$ (b) $(B \cap C)^c$ (c) $(B \cup C)^c$
   (d) $B^c \cup C^c$ (e) $A^c \cap C$ (f) $A^c \cap B^c$
   (g) Which of these sets are equal? Why?
6. The following statements about sets are false. For each statement, give an example, i.e., a choice of sets, for which the statement is false. Such examples are called **counterexamples**. They are examples that are counter to, i.e., contrary to, the assertion.
   (a) $A \cup B \subseteq A \cap B$ for all A, B.
   (b) $A \cap \varnothing = A$ for all A.
   (c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ for all A, B, C.
7. For any set A, what is $A \oplus A$? $A \oplus \varnothing$?
8. For the sets $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ and $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, determine the following numbers.
   (a) $|A|$ (b) $|B|$ (c) $|A \cup B|$
   (d) $|A| + |B| - |A \cap B|$
   (e) Do you see a general reason why the answers to (c) and (d) have to be the same?
9. The following statements about sets are false. Give a counterexample [see Exercise 6] to each statement.
   (a) $A \cap B = A \cap C$ implies $B = C$.
   (b) $A \cup B = A \cup C$ implies $B = C$.
   (c) $A \subseteq B \cup C$ implies $A \subseteq B$ or $A \subseteq C$.
10. (a) Show that relative complementation is not commutative; that is, the equality $A \setminus B = B \setminus A$ can fail.
    (b) Show that relative complementation is not associative: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ can fail.
11. Let $A = \{a, b, c\}$ and $B = \{a, b, d\}$.
    (a) List or draw the ordered pairs in $A \times A$.
    (b) List or draw the ordered pairs in $A \times B$.
    (c) List or draw the set $\{(x, y) \in A \times B : x = y\}$.
12. Let $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ and $T = \{0, 2, 4\}$.
    (a) How many ordered pairs are in $S \times T$? $T \times S$?
    (b) List or draw the elements in the set $\{(m, n) \in S \times T : m < n\}$.
    (c) List or draw the elements in the set $\{(m, n) \in T \times S : m < n\}$.
    (d) List or draw the elements in the set $\{(m, n) \in S \times T : m + n \geq 3\}$.
    (e) List or draw the elements in the set $\{(m, n) \in T \times S : mn \geq 4\}$.
    (f) List or draw the elements in the set $\{(m, n) \in S \times S : m + n = 10\}$.
13. For each of the following sets, list all elements if the set has fewer than seven elements. Otherwise, list exactly seven elements of the set.
    (a) $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m = n\}$
    (b) $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m + n \text{ is prime}\}$
    (c) $\{(m, n) \in \mathbb{P}^2 : m = 6\}$
    (d) $\{(m, n) \in \mathbb{P}^2 : \min\{m, n\} = 3\}$
    (e) $\{(m, n) \in \mathbb{P}^2 : \max\{m, n\} = 3\}$
    (f) $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : m^2 = n\}$
14. Draw a Venn diagram for four sets A, B, C, and D. Be sure to have a region for each of the 16 possible sets such as $A \cap B^c \cap C^c \cap D$. *Note:* This problem cannot be done using just circles, but it can be done using rectangles.

Answers

1. (a) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$. (c) $\{1, 5, 7, 9, 11\}$.
(e) $\{3, 6, 12\}$. (g) 16.

3. (a) $[2, 3]$. (c) $[0, 2)$. (e) $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$.
(g) $\mathbb{N}$. (i) $\varnothing$.

5. (a) $\varnothing$. (c) $\varnothing$. (e) $\{\lambda, ab, ba\}$.
(g) $B^c \cap C^c$ and $(B \cup C)^c$ are equal by a De Morgan law [or by calculation], as are $(B \cap C)^c$ and $B^c \cup C^c$.

7. $A \oplus A = \varnothing$ and $A \oplus \varnothing = A$.

9. (a) Make A very small, like $A = \varnothing$.
(c) Try $A = B \cup C$ with B and C disjoint.

11. (a) (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), etc. There are nine altogether.
(c) (a, a), (b, b).

13. (a) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $\ldots$, $(6, 6)$, say.
(c) $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $\ldots$, $(6, 7)$, say.
(e) $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$.

Functions

1. Let $f(n) = n^2 + 3$ and $g(n) = 5n - 11$ for $n \in \mathbb{N}$. Thus $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ and $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Calculate
   (a) $f(1)$ and $g(1)$ (b) $f(2)$ and $g(2)$
   (c) $f(3)$ and $g(3)$ (d) $f(4)$ and $g(4)$
   (e) $f(5)$ and $g(5)$
   (f) To think about: Is $f(n) + g(n)$ always an even number?
2. Consider the function $h: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ defined by $h(n) = |\{k \in \mathbb{N} : k|n\}|$ for $n \in \mathbb{P}$. In words, $h(n)$ is the number of divisors of n. Calculate $h(n)$ for $1 \le n \le 10$ and for $n = 73$.
3. Let Σ^* be the language using letters from $\Sigma = \{a, b\}$. We've already seen a useful function from Σ^* to $\mathbb{N}$. It is the length function, which already has a name: length. Calculate
   (a) length(bab) (b) length($aaaaaaa$)
   (c) length(λ)
   (d) What is the image set Im(length) for this function? Explain.
4. The codomain of a function doesn't have to consist of numbers either. Let Σ^* be as in Exercise 3, and define
$$g(n) = \{w \in \Sigma^* : \text{length}(w) \le n\} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Thus $g: \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$. Determine
   (a) $g(0)$ (b) $g(1)$ (c) $g(2)$
   (d) Are all the sets $g(n)$ finite?
   (e) Give an example of a set in $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ that is not in the image set Im(g).
5. Let f be the function in Example 3.
   (a) Calculate $f(0, 0)$, $f(8, 8)$, $f(-8, -8)$, $f(73, 73)$, and $f(-73, -73)$.
   (b) Find $f(n, n)$ for all (n, n) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Hint:* Consider the cases when n is even and when it is odd.
6. The greatest common divisor gcd defines a function on the product set $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$. It already has a fine name: gcd.
   (a) Calculate gcd(7, 14), gcd(14, 28), and gcd(1001, 2002).
   (b) What is gcd(n, $2n$) for all $n \in \mathbb{P}$?
   (c) What is the image set Im(gcd)?
7. We define $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as follows:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{if } x \ge 1, \\ x & \text{if } 0 \le x < 1, \\ -x^3 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$
   (a) Calculate $f(3)$, $f(1/3)$, $f(-1/3)$, and $f(-3)$.
   (b) Sketch a graph of f.
   (c) Find Im(f).
8. Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and consider the functions 1_S, f, g, and h from S into S defined by $1_S(n) = n$, $f(n) = 6 - n$, $g(n) = \max\{3, n\}$, and $h(n) = \max\{1, n - 1\}$.
   (a) Write each of these functions as a set of ordered pairs, i.e., list the elements in their graphs.
   (b) Sketch a graph of each of these functions.
9. For $n \in \mathbb{Z}$, let $f(n) = \frac{1}{2}[(-1)^n + 1]$. The function f is the characteristic function for some subset of $\mathbb{Z}$. Which subset?
10. Consider subsets A and B of a set S.
    (a) The function $\chi_A \cdot \chi_B$ is the characteristic function of some subset of S. Which subset? Explain.
    (b) Repeat part (a) for the function $\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.
    (c) Repeat part (a) for the function $\chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_{A \cap B}$.
11. Here we consider two functions that are defined in terms of the floor and ceiling functions.
    (a) Let $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ for $n \in \mathbb{N}$. Calculate $f(n)$ for $0 \le n \le 10$ and for $n = 73$.
    (b) Let $g(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ for $n \in \mathbb{Z}$. g is the characteristic function of some subset of $\mathbb{Z}$. What is the subset?
12. In Example 5(b), we compared the functions $\sqrt{\log x}$ and $\log \sqrt{x}$. Show that these functions take the same value for $x = 10{,}000$.
13. We define functions mapping $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ as follows: $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 1/(x^2 + 1)$, $h(x) = x^4$. Find
    (a) $f \circ f$ (b) $g \circ g$ (c) $h \circ g$
    (d) $g \circ h$ (e) $f \circ g \circ h$ (f) $f \circ h \circ g$
    (g) $h \circ g \circ f$
14. Repeat Exercise 13 for the functions $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, and $h(x) = 3x - 1$.
15. Consider the functions f and g mapping $\mathbb{Z}$ into $\mathbb{Z}$, where $f(n) = n - 1$ for $n \in \mathbb{Z}$ and g is the characteristic function χ_E of $E = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even}\}$.
    (a) Calculate $(g \circ f)(5)$, $(g \circ f)(4)$, $(f \circ g)(7)$, and $(f \circ g)(8)$.
    (b) Calculate $(f \circ f)(11)$, $(f \circ f)(12)$, $(g \circ g)(11)$, and $(g \circ g)(12)$.
    (c) Determine the functions $g \circ f$ and $f \circ f$.
    (d) Show that $g \circ g = g \circ f$ and that $f \circ g$ is the negative of $g \circ f$.
16. Several important functions can be found on hand-held calculators. Why isn't the identity function, i.e., the function $1_{\mathbb{R}}$, where $1_{\mathbb{R}}(x) = x$ for all $x \in \mathbb{R}$, among them?

Answers

1. (a) 4, -6. (c) 12, 4. (e) 28, 14.

3. (a) 3. (c) 0.

5. (a) 1, 1, 1, 0, 0. See the answer to part (b).
(b) $f(n, n) = 1$ for even n, and $f(n, n) = 0$ for odd n. This can be checked by calculation or by applying the theorem on page 5, with $k = 2$.

7. (a) $f(3) = 27$, $f(1/3) = 1/3$, $f(-1/3) = 1/27$, $f(-3) = 27$.
(c) $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$.

9. $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ is even}\}$.

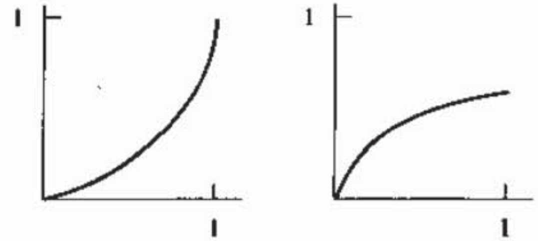
11. (a) The answers for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ are 0, 0, 1, 2, 3, 3. The remaining answers are 5, 5, 6, 7, 8, 60.

13. (a) $f \circ f(x) = (x^3 - 4x)^3 - 4(x^3 - 4x)$.
(c) $h \circ g(x) = (x^2 + 1)^{-4}$.
(e) $f \circ g \circ h(x) = (x^8 + 1)^{-3} - 4(x^8 + 1)^{-1}$.
(g) $h \circ g \circ f(x) = [(x^3 - 4x)^2 + 1]^{-4}$.

15. (a) 1, 0, -1, and 0.
(c) $g \circ f$ is the characteristic function of $\mathbb{Z} \setminus E$. $f \circ f(n) = n - 2$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

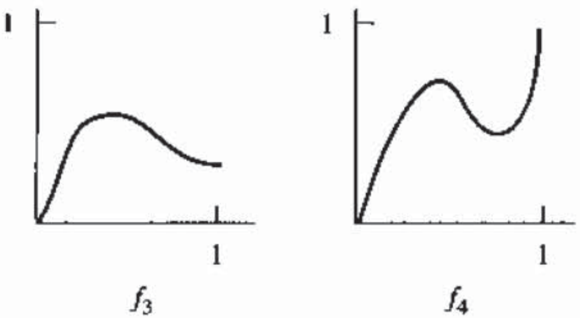
Properties of Functions

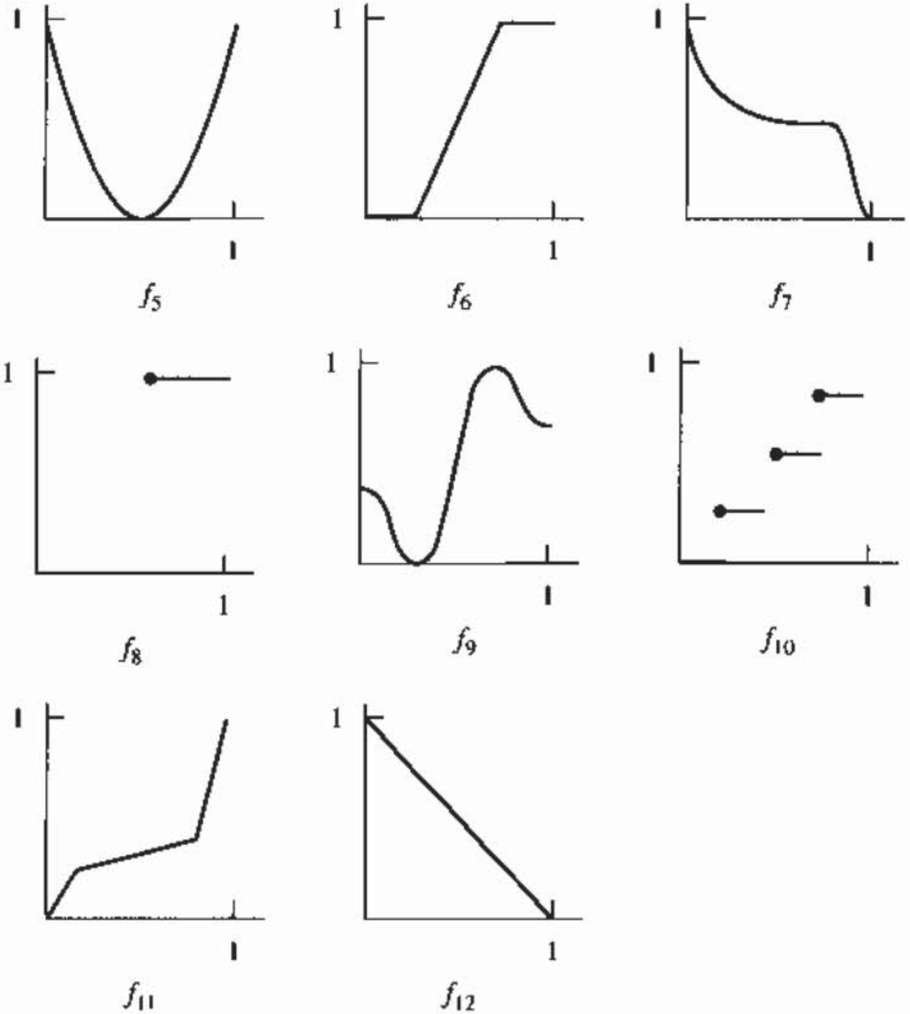
1. Let $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $T = \{a, b, c, d\}$. For each question below: if the answer is YES, give an example; if the answer if NO, explain briefly.
   (a) Are there any one-to-one functions from S into T?
   (b) Are there any one-to-one functions from T into S?
   (c) Are there any functions mapping S onto T?
   (d) Are there any functions mapping T onto S?
   (e) Are there any one-to-one correspondences between S and T?
2. The functions sketched in Figure 3 have domain and codomain both equal to [0,1].
   (a) Which of these functions are one-to-one?
   (b) Which of these functions map [0, 1] onto [0, 1]?
   (c) Which of these functions are one-to-one correspondences?
3. The function $f(m, n) = 2^m 3^n$ is a one-to-one function from $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ into $\mathbb{N}$.
   (a) Calculate $f(m, n)$ for five different elements (m, n) in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   (b) Explain why f is one-to-one.
   (c) Does f map $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ onto $\mathbb{N}$? Explain.
   (d) Show that $g(m, n) = 2^m 4^n$ defines a function on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ that is not one-to-one.
4. Consider the following functions from $\mathbb{N}$ into $\mathbb{N}$: $1_{\mathbb{N}}(n) = n$, $f(n) = 3n$, $g(n) = n + (-1)^n$, $h(n) = \min\{n, 100\}$, $k(n) = \max\{0, n - 5\}$.
   (a) Which of these functions are one-to-one?
   (b) Which of these functions map $\mathbb{N}$ onto $\mathbb{N}$?
5. Here are two "shift functions" mapping $\mathbb{N}$ into $\mathbb{N}$: $f(n) = n + 1$ and $g(n) = \max\{0, n - 1\}$ for $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculate $f(n)$ for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 73$.
   (b) Calculate $g(n)$ for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 73$.
   (c) Show that f is one-to-one but does not map $\mathbb{N}$ onto $\mathbb{N}$.
   (d) Show that g maps $\mathbb{N}$ onto $\mathbb{N}$ but is not one-to-one.
   (e) Show that $g \circ f(n) = n$ for all n, but that $f \circ g(n) = n$ does not hold for all n.
6. Let $\Sigma = \{a, b, c\}$ and let Σ^* be the set of all words w using letters from Σ; see Example 2(b). Define $L(w) = \text{length}(w)$ for all $w \in \Sigma^*$.
   (a) Calculate $L(w)$ for the words $w_1 = cab$, $w_2 = ababac$, and $w_3 = \lambda$.
   (b) Is L a one-to-one function? Explain.
   (c) The function L maps Σ^* into $\mathbb{N}$. Does L map Σ^* onto $\mathbb{N}$? Explain.
   (d) Find all words w such that $L(w) = 2$.
7. Find the inverses of the following functions mapping $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$.
   (a) $f(x) = 2x + 3$
   (b) $g(x) = x^3 - 2$
   (c) $h(x) = (x - 2)^3$
   (d) $k(x) = \sqrt[3]{x} + 7$
8. Many hand-held calculators have the functions $\log x$, x^2, $\sqrt{x}$, and $1/x$.
   (a) Specify the domains of these functions.
   (b) Which of these functions are inverses of each other?
   (c) Which pairs of these functions commute with respect to composition?
   (d) Some hand-held calculators also have the functions $\sin x$, $\cos x$, and $\tan x$. If you know a little trigonometry, repeat parts (a), (b), and (c) for these functions.
9. Show that the following functions are their own inverses.
   (a) The function $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ given by $f(x) = 1/x$.
   (b) The function $\phi: \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ defined by $\phi(A) = A^c$ *.
   (c) The function $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ given by $g(x) = 1 - x$.
10. Let A be a subset of some set S and consider the characteristic function χ_A of A. Find $\chi_A^{\leftarrow}(1)$ and $\chi_A^{\leftarrow}(0)$.
11. Here are some functions from $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ to $\mathbb{N}$: $\text{SUM}(m, n) = m + n$, $\text{PROD}(m, n) = m * n$, $\text{MAX}(m, n) = \max\{m, n\}$, $\text{MIN}(m, n) = \min\{m, n\}$; here $*$ denotes multiplication of integers.
    (a) Which of these functions map $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ onto $\mathbb{N}$?
    (b) Show that none of these functions are one-to-one.
    (c) For each of these functions F, how big is the set $F^{\leftarrow}(4)$?
12. Consider the function $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ defined by
$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$
This function is invertible. Show that the inverse function is given by
$$f^{-1}(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$$
for all (a, b) in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
13. Let $f: S \to T$ and $g: T \to U$ be one-to-one functions. Show that the function $g \circ f: S \to U$ is one-to-one.
14. Let $f: S \to T$ be an invertible function. Show that f^{-1} is invertible and that $(f^{-1})^{-1} = f$.
15. Let $f: S \to T$ and $g: T \to U$ be invertible functions. Show that $g \circ f$ is invertible and that $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.



f_1 f_2

Figure 3 ▶





Answers

1. (a) No; S is bigger than T.
(c) Yes. For example, let $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = f(5) = d$.
(e) No. This follows from either part (a) or part (d).

3. (a) $f(2, 1) = 2^2 3^1 = 12$, $f(1, 2) = 2^1 3^2 = 18$, etc.
(c) Consider 5, for instance. 5 is not in $\text{Im}(f)$.

5. (a) $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, $f(73) = 74$.
(c) For one-to-oneness, observe that if $f(n) = f(n')$,
not map onto $\mathbb{N}$ because $0 \notin \text{Im}(f)$.
(e) $g(f(n)) = \max\{0, (n+1) - 1\} = n$, but $f(g(0)) = f(0) = 1$.

7. (a) $f^{-1}(y) = (y - 3)/2$. (c) $h^{-1}(y) = 2 + \sqrt[3]{y}$.

9. (a) $(f \circ f)(x) = 1/(1/x) = x$.
(b) and (c) are similar verifications.

11. (a) All of them; verify this.
(c) $\text{SUM}^{\leftarrow}(4)$ has 5 elements, $\text{PROD}^{\leftarrow}(4)$ has 3 elements, $\text{MAX}^{\leftarrow}(4)$ has 9 elements, and $\text{MIN}^{\leftarrow}(4)$ is infinite.

13. If $s_1 \neq s_2$, then $f(s_1) \neq f(s_2)$ [why?]. Thus $g(f(s_1)) \neq g(f(s_2))$ [why?]. Hence $g \circ f$ is one-to-one.

15. Since f and g are invertible, the functions $f^{-1}: T \to S$, $g^{-1}: U \to T$, and $f^{-1} \circ g^{-1}: U \to S$ exist. So it suffices to show $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_U$ and $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_S$. One can show directly that $g \circ f$ is one-to-one [see Exercise 13] and onto, but it is actually easier—and more useful—to verify that $f^{-1} \circ g^{-1}$ has the properties of the inverse to $g \circ f$.

Relations

1. For the following relations on $S = \{0, 1, 2, 3\}$, specify which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) the relations satisfy.
   (a) $(m, n) \in R_1$ if $m + n = 3$
   (b) $(m, n) \in R_2$ if $m - n$ is even
   (c) $(m, n) \in R_3$ if $m \le n$
   (d) $(m, n) \in R_4$ if $m + n \le 4$
   (e) $(m, n) \in R_5$ if $\max\{m, n\} = 3$
2. Let $A = \{0, 1, 2\}$. Each of the statements below defines a relation R on A by $(m, n) \in R$ if the statement is true for m and n. Write each of the relations as a set of ordered pairs.
   (a) $m \le n$ (b) $m < n$
   (c) $m = n$ (d) $mn = 0$
   (e) $mn = m$ (f) $m + n \in A$
   (g) $m^2 + n^2 = 2$ (h) $m^2 + n^2 = 3$
   (i) $m = \max\{n, 1\}$
3. Which of the relations in Exercise 2 are reflexive? symmetric?
4. The following relations are defined on $\mathbb{N}$.
   (a) Write the relation R_1 defined by $(m, n) \in R_1$ if $m + n = 5$ as a set of ordered pairs.
   (b) Do the same for R_2 defined by $\max\{m, n\} = 2$.
   (c) The relation R_3 defined by $\min\{m, n\} = 2$ consists of infinitely many ordered pairs. List five of them.
5. For each of the relations in Exercise 4, specify which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) the relation satisfies.
6. Consider the relation R on $\mathbb{Z}$ defined by $(m, n) \in R$ if and only if $m^3 - n^3 \equiv 0 \pmod 5$. Which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) are satisfied by R?
7. Define the "divides" relation R on $\mathbb{N}$ by
$$(m, n) \in R \quad \text{if} \quad m|n.$$
   [Recall from §1.2 that $m|n$ means that n is a multiple of m.]
   (a) Which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) does R satisfy?
   (b) Describe the converse relation $R^{\leftarrow}$.
   (c) Which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) does the converse relation $R^{\leftarrow}$ satisfy?
8. What is the connection between a relation R and the relation $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow}$?
9. (a) If S is a nonempty set, then the empty set $\emptyset$ is a subset of $S \times S$, so it is a relation on S, called the the **empty relation**. Which of the properties (R), (AR), (S), (AS), and (T) does $\emptyset$ possess?
   (b) Repeat part (a) for the **universal relation** $U = S \times S$ on S.
10. Give an example of a relation that is:
    (a) antisymmetric and transitive but not reflexive,
    (b) symmetric but not reflexive or transitive.
11. Do a relation and its converse always satisfy the same conditions (R), (AR), (S), and (AS)? Explain.
12. Show that a relation R is transitive if and only if its converse relation $R^{\leftarrow}$ is transitive.
13. Let R_1 and R_2 be relations on a set S.
    (a) Show that $R_1 \cap R_2$ is reflexive if R_1 and R_2 are.
    (b) Show that $R_1 \cap R_2$ is symmetric if R_1 and R_2 are.
    (c) Show that $R_1 \cap R_2$ is transitive if R_1 and R_2 are.
14. Let R_1 and R_2 be relations on a set S.
    (a) Must $R_1 \cup R_2$ be reflexive if R_1 and R_2 are?
    (b) Must $R_1 \cup R_2$ be symmetric if R_1 and R_2 are?
    (c) Must $R_1 \cup R_2$ be transitive if R_1 and R_2 are?
15. Let R be a relation on a set S.
    (a) Prove that R is symmetric if and only if $R = R^{\leftarrow}$.
    (b) Prove that R is antisymmetric if and only if $R \cap R^{\leftarrow} \subseteq E$, where $E = \{(x, x) : x \in S\}$.
16. Let R_1 and R_2 be relations from a set S to a set T.
    (a) Show that $(R_1 \cup R_2)^{\leftarrow} = R_1^{\leftarrow} \cup R_2^{\leftarrow}$.
    (b) Show that $(R_1 \cap R_2)^{\leftarrow} = R_1^{\leftarrow} \cap R_2^{\leftarrow}$.
    (c) Show that if $R_1 \subseteq R_2$ then $R_1^{\leftarrow} \subseteq R_2^{\leftarrow}$.
17. Draw pictures of each of the relations in Exercise 1. Don't use arrows if the relation is symmetric.
18. Draw pictures of each of the relations in Exercise 2. Don't use arrows if the relation is symmetric.

Answers

1. (a) R_1 satisfies (AR) and (S).
(c) R_3 satisfies (R), (AS), and (T).
(e) R_5 satisfies only (S).

3. The relations in (a) and (c) are reflexive. The relations in (c), (d), (f), (g), and (h) are symmetric.

5. R_1 satisfies (AR) and (S). R_2 and R_3 satisfy only (S).

7. (a) The divides relation satisfies (R), (AS), and (T).
(c) The converse relation $R^{\leftarrow}$ also satisfies (R), (AS), and (T).

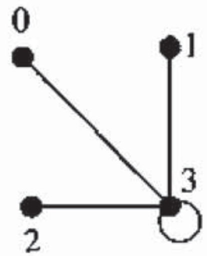
9. (a) The empty relation satisfies (AR), (S), (AS), and (T). The last three properties hold vacuously.

11. Yes. For (R) and (AR), observe that $(x, x) \in R \Longleftrightarrow (x, x) \in R^{\leftarrow}$. For (S) and (AS), just interchange x and y in the conditions for R to get the conditions for $R^{\leftarrow}$. There is no change in meaning.

13. (a) If $E \subseteq R_1$ and $E \subseteq R_2$, then $E \subseteq R_1 \cap R_2$. Alternatively, if R_1 and R_2 are reflexive and $x \in S$, then $(x, x) \in R_1$ and $(x, x) \in R_2$; so $(x, x) \in R_1 \cap R_2$.
(c) Suppose R_1 and R_2 are transitive. If $(x, y), (y, z) \in R_1 \cap R_2$, then $(x, y), (y, z) \in R_1$, so $(x, z) \in R_1$. Similarly, $(x, z) \in R_2$.

15. (a) Suppose R is symmetric. If $(x, y) \in R$, then $(y, x) \in R$ by symmetry, so $(x, y) \in R^{\leftarrow}$. Similarly, $(x, y) \in R^{\leftarrow}$ implies $(x, y) \in R$ [check] so that $R = R^{\leftarrow}$. For the converse, suppose that $R = R^{\leftarrow}$ and show R is symmetric.

17. (a) 

(c) See Figure 1(a).
(e) 

Relations

1. Which of the following describe equivalence relations? For those that are not equivalence relations, specify which of (R), (S), and (T) fail, and illustrate the failures with examples.

   (a) $L_1 \| L_2$ for straight lines in the plane if L_1 and L_2 are the same or are parallel.

   (b) $L_1 \perp L_2$ for straight lines in the plane if L_1 and L_2 are perpendicular.

   (c) $p_1 \sim p_2$ for Americans if p_1 and p_2 live in the same state.

   (d) $p_1 \approx p_2$ for Americans if p_1 and p_2 live in the same state or in neighboring states.

   (e) $p_1 \approx p_2$ for people if p_1 and p_2 have a parent in common.

   (f) $p_1 \cong p_2$ for people if p_1 and p_2 have the same mother.

2. For each example of an equivalence relation in Exercise 1, describe the members of some equivalence class.

3. Let S be a set. Is equality, i.e., "=", an equivalence relation?

4. Define the relation $\equiv$ on $\mathbb{Z}$ by $m \equiv n$ in case $m - n$ is even. Is $\equiv$ an equivalence relation? Explain.

5. If G and H are both graphs with vertex set $\{1, 2, \ldots, n\}$, we say that G is **isomorphic** to H, and write $G \simeq H$, in case there is a way to label the vertices of G so that it becomes H. For example, the graphs in Figure 3, with vertex set $\{1, 2, 3\}$, are isomorphic by relabeling $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, and $f(3) = 1$.

   (a) Give a picture of another graph isomorphic to these two.

   (b) Find a graph with vertex set $\{1, 2, 3\}$ that is not isomorphic to the graphs in Figure 3, yet has three edges, exactly one of which is a loop.

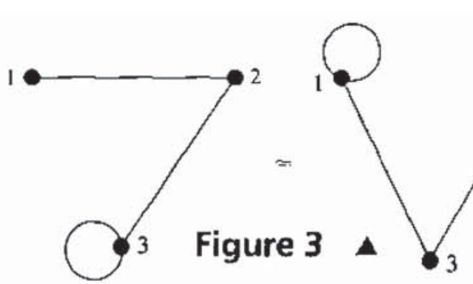


Figure 3 ▲

   (c) Find another example as in part (b) that isn't isomorphic to the one you found in part (b) [or the ones in Figure 3].

   (d) Show that $\simeq$ is an equivalence relation on the set of all graphs with vertex set $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Can you think of situations in life where you'd use the term "equivalent" and where a natural equivalence relation is involved?

7. Define the relation $\approx$ on $\mathbb{Z}$ by $m \approx n$ in case $m^2 = n^2$.

   (a) Show that $\approx$ is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$.

   (b) Describe the equivalence classes for $\approx$. How many are there?

8. (a) For $m, n \in \mathbb{Z}$, define $m \sim n$ in case $m - n$ is odd. Is the relation $\sim$ reflexive? symmetric? transitive? Is $\sim$ an equivalence relation?

   (b) For a and b in $\mathbb{R}$, define $a \sim b$ in case $|a - b| \le 1$. One could say that $a \sim b$ in case a and b are "close enough" or "approximately equal." Answer the questions in part (a).

9. Consider the functions g and h mapping $\mathbb{Z}$ into $\mathbb{N}$ defined by $g(n) = |n|$ and $h(n) = 1 + (-1)^n$.

   (a) Describe the sets in the partition $\{g^{\leftarrow}(k) : k \text{ is in the codomain of } g\}$ of $\mathbb{Z}$. How many sets are there?

   (b) Describe the sets in the partition $\{h^{\leftarrow}(k) : k \text{ is in the codomain of } h\}$ of $\mathbb{Z}$. How many sets are there?

10. On the set $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ define $(m, n) \sim (k, l)$ if $m + l = n + k$.

    (a) Show that $\sim$ is an equivalence relation on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

    (b) Draw a sketch of $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ that shows several equivalence classes.

11. Let Σ be an alphabet, and for w_1 and w_2 in Σ^* define $w_1 \sim w_2$ if $\text{length}(w_1) = \text{length}(w_2)$. Explain why $\sim$ is an equivalence relation, and describe the equivalence classes.

12. Let P be a set of computer programs, and regard programs p_1 and p_2 as equivalent if they always produce the same outputs for given inputs. Is this an equivalence relation on P? Explain.

13. Consider $\mathbb{Z} \times \mathbb{P}$ and define $(m, n) \sim (p, q)$ if $mq = np$.

    (a) Show that $\sim$ is an equivalence relation on $\mathbb{Z} \times \mathbb{P}$.

    (b) Show that $\sim$ is the equivalence relation corresponding to the function $\mathbb{Z} \times \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ given by $f(m, n) = \frac{m}{n}$; see Theorem 2(a).

14. In the proof of Theorem 2(b), we obtained the equality $\nu^{\leftarrow}([s]) = [s]$. Does this mean that the function ν has an inverse and that the inverse of ν is the identity function on $[S]$? Discuss.

15. As in Exercise 7 define $\approx$ on $\mathbb{Z}$ by $m \approx n$ in case $m^2 = n^2$.

    (a) What is wrong with the following "definition" of $\le$ on $[\mathbb{Z}]$? Let $[m] \le [n]$ if and only if $m \le n$.

    (b) What, if anything, is wrong with the following "definition" of a function $f : [\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}$? Let $f([m]) = m^2 + m + 1$.

    (c) Repeat part (b) with $g([m]) = m^4 + m^2 + 1$.

    (d) What, if anything, is wrong with the following "definition" of the operation $\oplus$ on $[\mathbb{Z}]$? Let $[m] \oplus [n] = [m + n]$.

16. Let $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{P}\right\}$. Which of the following are well-defined definitions of functions on $\mathbb{Q}^+$?

    (a) $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{n}{m}$ (b) $g\left(\dfrac{m}{n}\right) = m^2 + n^2$

    (c) $h\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m^2 + n^2}{mn}$

17. (a) Verify that the relation $\cong$ defined in Example 5(b) is an equivalence relation on $V(G)$.

(b) Given a vertex v in $V(G)$, describe in words the equivalence class containing v.

18. Let S be the set of all sequences (s_n) of real numbers, and define $(s_n) \approx (t_n)$ if $\{n \in \mathbb{N} : s_n \neq t_n\}$ is finite. Show that $\approx$ is an equivalence relation on S.

19. Show that the function θ in Example 12 is a one-to-one correspondence between the set $[S]$ of equivalence classes and the set $f(S)$ of values of f.

Answers

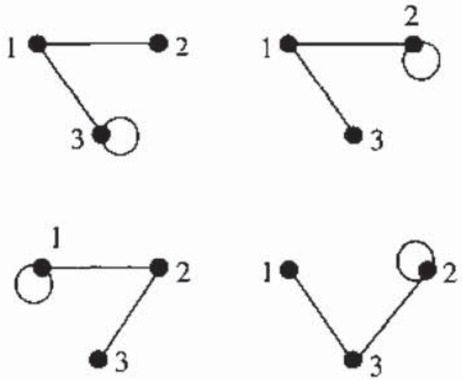
1. (a) is an equivalence relation.
   (c) There are lots of Americans who live in no state, e.g., the residents of Washington, D.C., so

   (R) fails for $\sim$.

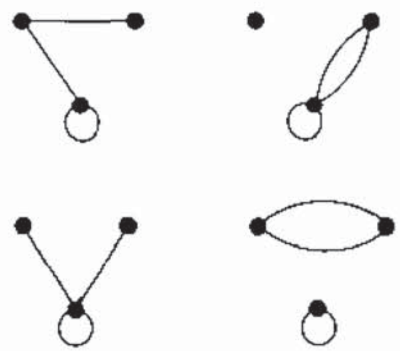
   (e) is not an equivalence relation because $\approx$ is not transitive.

3. Very much so. See Example 5 on page 97.

5. (a) The possibilities are



(c) The four equivalence classes have representatives



7. (a) Verify directly, or apply Theorem 2(a) on page 117 with $f(m) = m^2$ for $m \in \mathbb{Z}$.

9. (a) There are infinitely many classes: $\{0\}$ and the classes $\{n, -n\}$ for $n \in \mathbb{P}$.

11. Apply Theorem 2, using the length function. The equivalence classes are the sets Σ^k, $k \in \mathbb{N}$.

13. (a) Use brute force or Theorem 2(a) with part (b).

15. (a) Not well-defined: depends on the representative. For example, $[3] = [-3]$ and $-3 \leq 2$. If the definition made sense, we would have $[3] = [-3] \leq [2]$ and hence $3 \leq 2$.
    (c) Nothing wrong. If $[m] = [n]$, then $m^4 + m^2 + 1 = n^4 + n^2 + 1$.

17. (a) $\cong$ is reflexive by its definition, and it's symmetric since equality "=" and R are. For transitivity, consider $u \cong v$ and $v \cong w$. If $u = v$ or if $v = w$, then $u \cong w$ is clear. Otherwise, (u, v) and (v, w) are in R, so (u, w) is in R. Either way, $u \cong w$. Thus $\cong$ is transitive.

19. For one-to-one, observe that $\theta([s]) = \theta([t])$ implies $f(s) = f(t)$ implies $s \sim t$, and this implies $[s] = [t]$. Clearly, θ maps $[S]$ into $f(S)$. To see that θ maps onto $f(S)$, consider $y \in f(S)$. Then $y = f(s_0)$ for some $s_0 \in S$. Hence $[s_0]$ belongs to $[S]$ and $\theta([s_0]) = f(s_0) = y$. That is, y is in $\text{Im}(\theta)$. We've shown $f(S) \subseteq \text{Im}(\theta)$, so θ maps $[S]$ onto $f(S)$.

1. Explain why $n^5 - n$ is a multiple of 10 for all n in $\mathbb{P}$. *Hint:* Most of the work was done in Example 1.
2. Write a loop in the style of Figure 2 that corresponds to the proof that $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ in Example 2(b).
3. (a) Show that "$n^5 - n + 1$ is a multiple of 5" is an invariant of the loop in Figure 1.
   (b) Is $n^5 - n + 1$ a multiple of 5 for all n in $\mathbb{P}$ with $n \le 37^{100}$?
4. (a) Show that $n^3 - n$ is a multiple of 6 for all n in $\mathbb{P}$.
   (b) Use part (a) to give another proof of Example 2(d).
5. Prove

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{P}.$$

6. Prove

$$4 + 10 + 16 + \cdots + (6n-2) = n(3n+1) \text{ for all } n \in \mathbb{P}.$$

7. Show each of the following.
   (a) $37^{100} - 37^{20}$ is a multiple of 10.
   (b) $37^{20} - 37^4$ is a multiple of 10.
   (c) $37^{500} - 37^4$ is a multiple of 10.
   (d) $37^4 - 1$ is a multiple of 10.
   (e) $37^{500} - 1$ is a multiple of 10.
8. Prove

$$\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{P}.$$

9. Show by induction that, if $s_0 = a$ and $s_n = 2s_{n-1} + b$ for $n \in \mathbb{P}$, then $s_n = 2^n a + (2^n - 1)b$ for every $n \in \mathbb{N}$.
10. Consider the following procedure.

```
begin
S := 1
while 1 ≤ S do
    print S
    S := S + 2√S + 1
```

   (a) List the first four printed values of S.
   (b) Use mathematical induction to show that the value of S is always an integer. [It is easier to prove the stronger statement that the value of S is always the square of an integer; in fact, $S = n^2$ at the start of the nth pass through the loop.]
11. Prove that $11^n - 4^n$ is divisible by 7 for all n in $\mathbb{P}$.
12. (a) Choose m and $p(k)$ in the segment

```
k := m
while m ≤ k do
    if p(k) is true then
        k := k + 1
```

   so that proving $p(k)$ an invariant of the loop would show that $2^n < n!$ for all integers $n \ge 4$.
   (b) Verify that your $p(k)$ in part (a) is an invariant of the loop.
   (c) The proposition $p(k) =$ "$8^k < k!$" is an invariant of this loop. Does it follow that $8^n < n!$ for all $n \ge 4$? Explain.
13. (a) Show that $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ is an invariant of the loop in the algorithm

```
begin
k := 0
while 0 ≤ k do
    k := k + 1
end
```

   (b) Repeat part (a) for the invariant $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1}$.
   (c) Can you use part (a) to prove that $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ for every k in $\mathbb{N}$? Explain.
   (d) Can you use part (b) to prove that $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1}$ for every k in $\mathbb{N}$? Explain.
14. Prove that $n^2 > n + 1$ for $n \ge 2$.
15. (a) Calculate $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ for a few values of n, and then guess a general formula for this sum.
   (b) Prove the formula obtained in part (a) by induction.
16. For which n in $\mathbb{P}$ does the inequality $4n \le n^2 - 7$ hold? Explain.
17. Consider the proposition $p(n) =$ "$n^2 + 5n + 1$ is even."
   (a) Prove that $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ for all k in $\mathbb{P}$.
   (b) For which values of n is $p(n)$ actually true? What is the moral of this exercise?
18. Prove $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \cdots + (4n-1) = 3n^2$ for all n in $\mathbb{P}$. The sum can also be written $\sum_{i=n}^{2n-1} (2i+1)$.
19. Prove that $5^n - 4n - 1$ is divisible by 16 for n in $\mathbb{P}$.

20. Prove $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$, i.e., $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2$ for all n in $\mathbb{P}$. *Hint:* Use the identity in Example 2(b).

21. Prove that

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

for n in $\mathbb{P}$. For $n = 1$ this equation says that $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, and for $n = 2$ it says that $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

22. For n in $\mathbb{P}$, prove

(a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \ge \sqrt{n}$ (b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \le 2\sqrt{n} - 1$

23. Prove that $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ is divisible by 8 for $n \in \mathbb{N}$.

24. Prove that $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ is divisible by 73 for $n \in \mathbb{N}$.

25. This exercise requires a little knowledge of trigonometric identities. Prove that $|\sin nx| \le n|\sin x|$ for all x in $\mathbb{R}$ and all n in $\mathbb{P}$.

Answers

Induction proofs should be written carefully and completely. These answers will serve only as guides, *not* as models.

1. This is clear, because both n^5 and n are even if n is even, and both are odd if n is odd.

3. (a) If $k^5 - k + 1$ is a multiple of 5 for some $k \in \mathbb{P}$, then, just as in Example 1,

$$(k+1)^5 - (k+1) + 1 = (k^5 - k + 1) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k),$$

so $(k+1)^5 - (k+1) + 1$ is also a multiple of 5.

5. Check the basis. For the inductive step, assume the equality holds for k. Then

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Some algebra shows that the right-hand side equals

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

so the equality holds for $k + 1$ whenever it holds for k.

7. (a) Take $n = 37^{20}$ in Exercise 1.

(c) By (a), (b), and Exercise 1, $(37^{500} - 37^{100}) + (37^{100} - 37^{20}) + (37^{20} - 37^4)$ is a multiple of 10.

(e) By (c) and (d), as in (c).

9. The basis is "$s_0 = 2^0 a + (2^0 - 1)b$," which is true since $2^0 = 1$ and $s_0 = a$. Assume inductively that $s_k = 2^k a + (2^k - 1)b$ for some $k \in \mathbb{N}$. The algebra in the inductive step is

$$2 \cdot [2^k a + (2^k - 1)b] + b = 2^{k+1}a + 2^{k+1}b - 2b + b.$$

11. Show that $11^{k+1} - 4^{k+1} = 11 \cdot (11^k - 4^k) + 7 \cdot 4^k$. Imitate Example 2(d).

13. (a) Suppose that $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ and $0 \le k$. Then

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \left(\sum_{i=0}^{k} 2^i\right) + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1,$$

so the equation still holds for the new value of k.

(c) Yes. $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^1 - 1$ initially, so the loop never exits and the invariant is true for every value of k in $\mathbb{N}$.

15. (a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

17. (a) Assume $p(k)$ is true. Then $(k+1)^2 + 5(k+1) + 1 = (k^2+5k+1) + (2k+6)$. Since k^2+5k+1 is even by assumption and $2k+6$ is clearly even, $p(k+1)$ is true.

19. *Hint:* $5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 5(5^k - 4k - 1) + 16k$.

21. *Hints:*

$$\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} = \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

and

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

Alternatively, to avoid induction, let $f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ and write both sides in terms of f. The left-hand side is $f(2n) - f(n)$, and the right-hand side is

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n}\right) - 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$= f(2n) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot f(n).$$

23. *Hints:* $5^{k+2} + 2 \cdot 3^{k+1} + 1 = 5(5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1) - 4(3^k + 1)$. Show that $3^n + 1$ is always even.

25. Here $p(n)$ is the proposition "$|\sin nx| \le n|\sin x|$ for all $x \in \mathbb{R}$." Clearly, $p(1)$ holds. By algebra and trigonometry,

$$\begin{aligned}|\sin(k+1)x| &= |\sin(kx+x)| = |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \\ &\le |\sin kx| \cdot |\cos x| + |\cos kx| \cdot |\sin x| \le |\sin kx| + |\sin x|.\end{aligned}$$

Now assume $p(k)$ is true and show $p(k+1)$ is true.

Induction and Recursion

Some of the exercises for this section require only the First Principle of Mathematical Induction and are included to provide extra practice. Most of them deal with sequences. You will see a number of applications later in which sequences are not so obvious.

1. Prove $3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n$ for $n \in \mathbb{P}$.

2. For $n \in \mathbb{P}$, prove

   (a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   (b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

3. Prove that $n^5 - n$ is divisible by 10 for all $n \in \mathbb{P}$.

4. (a) Calculate b_6 for the sequence (b_n) in Example 2.

   (b) Use the recursive definition of (a_n) in Example 3 to calculate a_9.

5. Is the First Principle of Mathematical Induction adequate to prove the fact in Exercise 11(b) on page 159? Explain.

6. Recursively define $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, and $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$ for $n \geq 2$.

   (a) Calculate the first few terms of the sequence.

   (b) Using part (a), guess the general formula for a_n.

   (c) Prove the guess in part (b).

7. Recursively define $a_0 = a_1 = 1$ and $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 + a_{n-2}}{a_{n-1} + a_{n-2}}$ for $n \geq 2$. Repeat Exercise 6 for this sequence.

8. Recursively define $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, and $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2 - 1}{a_{n-2}}$ for $n \geq 2$. Repeat Exercise 6 for this sequence.

9. Recursively define $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, and $a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2} + 3)^2$ for $n \geq 2$. Repeat Exercise 6 for this sequence.

10. Recursively define $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, and $a_n =$

10. Recursively define $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, and $a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3}$ for $n \geq 3$.

    (a) Calculate a_n for $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

    (b) Prove that $a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ for all $n \geq 1$.

11. Recursively define $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ and $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ for $n \geq 3$.

    (a) Calculate the first few terms of the sequence.

    (b) Prove that all the a_n's are odd.

    (c) Prove that $a_n \leq 2^{n-1}$ for all $n \geq 1$.

12. Recursively define $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, and $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ for $n \geq 3$.

    (a) Calculate a_n for $n = 3, 4, 5, 6, 7$.

    (b) Prove that $a_n > 2^n$ for $n \geq 1$.

    (c) Prove that $a_n < 2^{n+1}$ for $n \geq 1$.

    (d) Prove that $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n-1}$ for $n \geq 1$.

13. Recursively define $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ and $b_n = b_{n-1} + b_{n-3}$ for $n \geq 3$.

    (a) Calculate b_n for $n = 3, 4, 5, 6$.

    (b) Show that $b_n \geq 2b_{n-2}$ for $n \geq 3$.

    (c) Prove the inequality $b_n \geq (\sqrt{2})^{n-2}$ for $n \geq 2$.

14. For the sequence in Exercise 13, show that $b_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ for $n \geq 1$.

15. Recursively define $\text{SEQ}(0) = 0$, $\text{SEQ}(1) = 1$, and

    $$\text{SEQ}(n) = \frac{1}{n} \cdot \text{SEQ}(n-1) + \frac{n-1}{n} \cdot \text{SEQ}(n-2)$$

    for $n \geq 2$. Prove that $0 \leq \text{SEQ}(n) \leq 1$ for all $n \in \mathbb{N}$.

16. As in Exercise 15 on page 159, let $\text{SEQ}(0) = 1$ and $\text{SEQ}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{SEQ}(i)$ for $n \geq 1$. Prove that $\text{SEQ}(n) = 2^{n-}$ for $n \geq 1$.

17. Recall the Fibonacci sequence in Example 2(b) defined by

    (B) $\text{FIB}(1) = \text{FIB}(2) = 1$,

    (R) $\text{FIB}(n) = \text{FIB}(n-1) + \text{FIB}(n-2) \quad$ for $n \geq 3$.

    Prove that

    $$\text{FIB}(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \text{FIB}(k) \qquad \text{for } n \geq 3.$$

18. The **Lucas sequence** is defined as follows:

    (B) $\text{LUC}(1) = 1$ and $\text{LUC}(2) = 3$,

    (R) $\text{LUC}(n) = \text{LUC}(n-1) + \text{LUC}(n-2) \quad$ for $n \geq 3$.

    (a) List the first eight terms of the Lucas sequence.

    (b) Prove that $\text{LUC}(n) = \text{FIB}(n+1) + \text{FIB}(n-1)$ for $n \geq 2$, where FIB is the Fibonacci sequence defined in Exercise 17.

19. Let the sequence T be defined as in Example 2(a) on page 154 by (B) $T(1) = 1$,

    (R) $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor n/2 \rfloor) \quad$ for $n \geq 2$.

    Show that $T(n)$ is the largest integer of the form 2^k with $2^k \leq n$. That is, $T(n) = 2^{\lfloor \log n \rfloor}$, where the logarithm is to the base 2.

20. (a) Show that if T is defined as in Exercise 19, then $T(n)$ is $O(n)$.

    (b) Show that if the sequence Q is defined as in Example 2(b) on page 154 by

    (B) $Q(1) = 1$,

    (R) $Q(n) = 2 \cdot Q(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad$ for $n \geq 2$,

    then $Q(n)$ is $O(n^2)$.

    (c) Show that, in fact, $Q(n)$ is $O(n \log_2 n)$ for Q as in part (b).

21. Show that if S is defined as in Example 6 on page 157 by (B) $S(0) = 0$, $S(1) = 1$,

    (R) $S(n) = S(\lfloor n/2 \rfloor) + S(\lfloor n/5 \rfloor) \quad$ for $n \geq 2$,

    then $S(n)$ is $O(n)$.

Answers

1. The First Principle is adequate for this. For the inductive step, use the identity $4n^2-n+8(n+1)-5 = 4n^2+7n+3 = 4(n+1)^2-(n+1)$.

3. Show that n^5-n is always even. Then use the identity $(n+1)^5 = n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$ [from the binomial theorem]. Use the First Principle of induction to show that n^5-n is always divisible by 5. See Example 1 on page 137.

5. Yes. The oddness of a_n depends only on the oddness of a_{n-1}, since $2a_{n-2}$ is even whether a_{n-2} is odd or not.

7. (b) $a_n = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$.
   (c) The basis needs to be checked for $n = 0$ and $n = 1$. For the inductive step, consider $n \geq 2$ and assume $a_k = 1$ for $0 \leq k < n$. Then $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-2}}{a_{n-1}+a_{n-2}} = \frac{1^2+1}{1+1} = 1$. This completes the inductive step, so $a_n = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ by the Second Principle of Induction.

9. (b) $a_n = n^2$ for all $n \in \mathbb{N}$.
   (c) The basis needs to be checked for $n = 0$ and $n = 1$. For the inductive step, consider $n \geq 2$ and assume that $a_k = k^2$ for $0 \leq k < n$. To complete the inductive step, note that

$$a_n = \frac{1}{4}(a_{n-1} - a_{n-2} + 3)^2 = \frac{1}{4}[(n-1)^2 - (n-2)^2 + 3]^2 = \frac{1}{4}[2n]^2 = n^2.$$

11. (b) The basis needs to be checked for $n = 0$, 1, and 2. For the inductive step, consider $n \geq 3$ and assume that a_k is odd for $0 \leq k < n$. Then a_{n-1}, a_{n-2}, and a_{n-3} are all odd. Since the sum of three odd integers is odd [if not obvious, prove it], a_n is also odd.
   (c) Since the inequality is claimed for $n \geq 1$ and since you will want to use the identity $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ in the inductive step, you will need $n - 3 \geq 1$ in the inductive step. So check the basis for $n = 1$, 2, and 3. For the inductive step, consider $n \geq 4$ and assume that $a_k \leq 2^{k-1}$ for $1 \leq k < n$. To complete the inductive step, note that

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} < 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} = \frac{7}{8} \cdot 2^{n-1} < 2^{n-1}.$$

15. Check for $n = 0$ and 1 before applying induction. It may be simpler to prove "$\text{SEQ}(n) \leq 1$ for all n" separately from "$\text{SEQ}(n) \geq 0$ for all n." For example, assume that $n \geq 2$ and that $\text{SEQ}(k) \leq 1$ for $0 \leq k < n$. Then

$$\text{SEQ}(n) = (1/n) * \text{SEQ}(n-1) + ((n-1)/n) * \text{SEQ}(n-2) \leq (1/n) + ((n-1)/n) = 1.$$

The proof that $\text{SEQ}(n) \geq 0$ for $n \geq 0$ is almost the same.

17. The First Principle of Induction is enough. Use (R) to check for $n = 3$. For the inductive step from n to $n+1$,

$$\text{FIB}(n+1) = \text{FIB}(n) + \text{FIB}(n-1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \text{FIB}(k) + \text{FIB}(n-1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \text{FIB}(k).$$

13. (a) 2, 3, 4, 6.
   (b) The inequality must be checked for $n = 3$, 4, and 5 before applying the Second Principle of Mathematical Induction on page 167 to $b_n = b_{n-1} + b_{n-3}$. For the inductive step, consider $n \geq 6$ and assume $b_k \geq 2b_{k-2}$ for $3 \leq k < n$. Then

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} \geq 2b_{n-3} + 2b_{n-5} = 2b_{n-2}.$$

   (c) The inequality must be checked for $n = 2$, 3, and 4. Then use the Second Principle of Mathematical Induction and part (b). For the inductive step, consider $n \geq 5$ and assume $b_k \geq (\sqrt{2})^{k-2}$ for $2 \leq k < n$. Then

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-3} \geq 2b_{n-3} + b_{n-3} = 3b_{n-3} \geq 3(\sqrt{2})^{n-5}$$
$$> (\sqrt{2})^3(\sqrt{2})^{n-5} = (\sqrt{2})^{n-2}.$$

Note that $3 > (\sqrt{2})^3 \approx 2.828$. This can also be proved without using part (b):

$$b_n \geq (\sqrt{2})^{n-3} + (\sqrt{2})^{n-5} = (\sqrt{2})^{n-2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2^{3/2}}\right] > (\sqrt{2})^{n-2}.$$

19. For $n > 0$, let $L(n)$ be the largest integer 2^k with $2^k \leq n$. Show that $L(n) = T(n)$ for all n by showing first that $L(\lfloor n/2 \rfloor) = L(n/2)$ for $n \geq 2$ and then using the Second Principle of Induction.

21. Show that $S(n) \leq n$ for every n by the Second Principle of Induction.

Matrices

1. Consider the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Evaluate

(a) a_{11} (b) a_{13} (c) a_{31} (d) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$

2. Consider the matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Evaluate

(a) b_{12} (b) b_{21} (c) b_{23} (d) $\sum_{i=1}^{4} b_{ii}$

3. Consider the matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Calculate the following when they exist.

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{C}^T$ (c) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
(d) $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ (e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$ (f) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
(g) $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$ (h) $\mathbf{C} + \mathbf{C}^T$

4. For the matrices in Exercise 3, calculate the following when they exist.

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ (b) $2\mathbf{A}$
(c) $\mathbf{A} + \mathbf{A} + \mathbf{A}$ (d) $4\mathbf{A} + \mathbf{B}$

5. Let $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ and $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ be matrices in $\mathfrak{M}_{4,3}$ defined by $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ and $b_{ij} = i + j$. Find the following matrices when they exist.

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$
(d) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$ (f) $\mathbf{A} + \mathbf{A}$

6. Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be matrices in $\mathfrak{M}_{3,3}$ defined by $\mathbf{A}[i, j] = ij$ and $\mathbf{B}[i, j] = i + j^2$.

(a) Find $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

(b) Calculate $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{A}[i, i]$.

(c) Does $\mathbf{A}$ equal its transpose $\mathbf{A}^T$?

(d) Does $\mathbf{B}$ equal its transpose $\mathbf{B}^T$?

7. Consider the matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calculate the following

(a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{BA}$
(c) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$ (d) $\mathbf{B}^2$

8. (a) For the matrices in Exercise 7, calculate

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2.$$

(b) Are the answers to part (a) the same? Discuss.

9. (a) List all the 3×3 matrices whose rows are

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ and } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Which matrices obtained in part (a) are equal to their transposes?

10. In this exercise, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ represent matrices. True or false?

(a) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ for all $\mathbf{A}$.

(b) If $\mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T$, then $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(c) If $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, then $\mathbf{A}$ is a square matrix.

(d) If $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are the same size, then $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

11. For each $n \in \mathbb{N}$, let

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Give $\mathbf{A}_n^T$ for all $n \in \mathbb{N}$.

(b) Find $\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{A}_n^T = \mathbf{A}_n\}$.

(c) Find $\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{B}_n^T = \mathbf{B}_n\}$.

(d) Find $\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{B}_n = \mathbf{B}_0\}$.

12. For $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ in $\mathfrak{M}_{m,n}$, let $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. Show that

(a) $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} = \mathbf{A}$

(b) $-(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mathbf{A}$

(c) $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{C} \neq \mathbf{A} - (\mathbf{B} - \mathbf{C})$ in general

13. Consider $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ in $\mathfrak{M}_{m,n}$ and a, b, c in $\mathbb{R}$. Show that

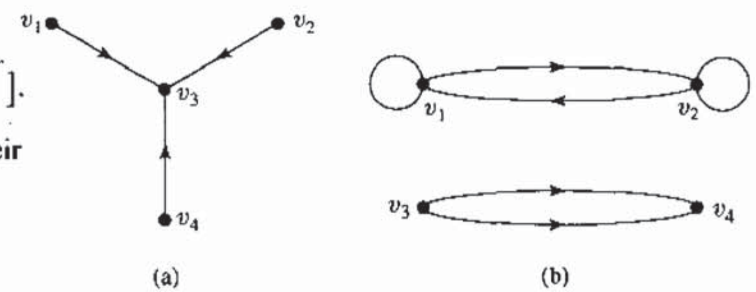
(a) $c(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = (ca)\mathbf{A} + (cb)\mathbf{B}$

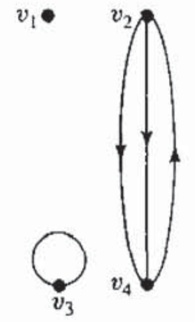
(b) $-a\mathbf{A} = (-a)\mathbf{A} = a(-\mathbf{A})$

(c) $(a\mathbf{A})^T = a\mathbf{A}^T$

14. Prove parts (b), (c), and (d) of the theorem on page 108.

15. Give the matrices for the digraphs in Figure 3.

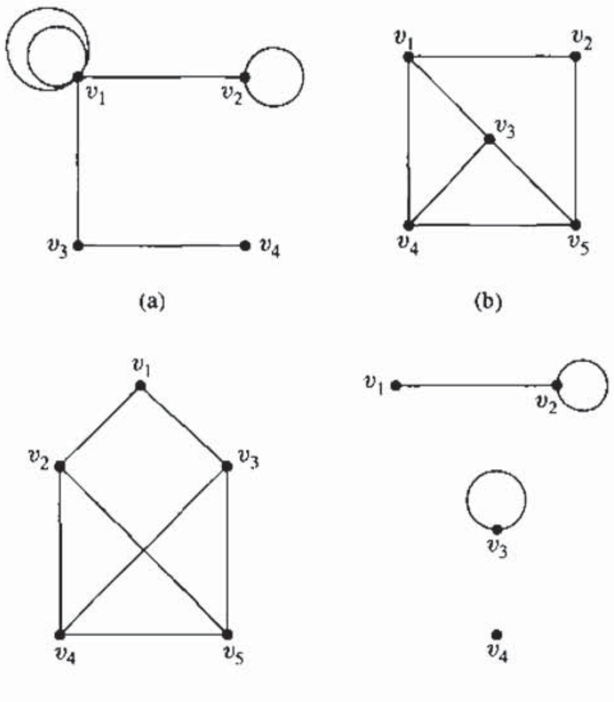




(c)

Figure 3 ▲

16. Write matrices for the graphs in Figure 4.



(a) (b) (c) (d)

Figure 4 ▲

17. For each matrix in Figure 5, draw a digraph having the matrix.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b) (c)

Figure 5 ▲

18. For each matrix in Figure 6, draw a graph having the matrix.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) (d)

Figure 6 ▲

19. Give a matrix for each of the relations in Exercise 1 on page 99.

20. Draw a digraph having the matrix in Figure 6(b).

21. Give a matrix for each of the relations in Exercise 2 on page 99.

Answers

1. (a) 1. (c) 2.

3. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$. (g) $\begin{bmatrix} 12 & 12 & 8 \\ 12 & -4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (c) Not defined.

(e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\begin{bmatrix} -15 & 45 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 18 & 54 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$.

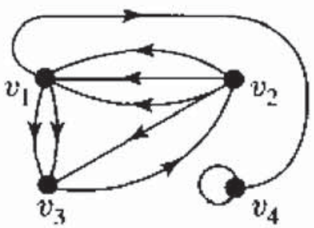
9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

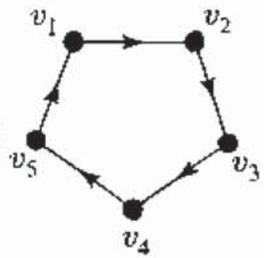
11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$. (c) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ is odd}\}$.

13. (a) The (i, j) entry of $a\mathbf{A}$ is $a\mathbf{A}[i, j]$. Similarly for $b\mathbf{B}$, and so the (i, j) entry of $a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ is $a\mathbf{A}[i, j] + b\mathbf{B}[i, j]$. So the (i, j) entry of $c(a\mathbf{A} + b\mathbf{B})$ is $ca\mathbf{A}[i, j] + cb\mathbf{B}[i, j]$. A similar discussion shows that this is the (i, j) entry of $(ca)\mathbf{A} + (cb)\mathbf{B}$. Since their entries are equal, the matrices $c(a\mathbf{A} + b\mathbf{B})$ and $(ca)\mathbf{A} + (cb)\mathbf{B}$ are equal.

(c) The (j, i) entries of both $(a\mathbf{A})^T$ and $a\mathbf{A}^T$ equal $a\mathbf{A}[i, j]$. Here $1 \le i \le m$ and $1 \le j \le n$. So the matrices are equal.

15. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17. (a) 

(c) 

19. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (c) See Example 5(a) on page 110.

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

21. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Multiplication of Matrices

1. Let

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Find the following when they exist.

(a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{BA}$ (c) $\mathbf{ABA}$

(d) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$ (e) $3\mathbf{A}^T - 2\mathbf{B}$ (f) $(\mathbf{AB})^2$

2. Let

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be as in Exercise 1. Find the following when they exist.

(a) $\mathbf{AC}$ (b) $\mathbf{BC}$ (c) $\mathbf{C}^2$

(d) $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ (e) $\mathbf{CC}^T$ (f) $73\mathbf{C}$

3. Let

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{and} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Find the following when they exist.

(a) $\mathbf{A}^2$ (b) $\mathbf{B}^2$ (c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

4. Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be as in Exercise 3. Find the following when they exist.

(a) $\mathbf{BA}^T$ (b) $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$

(c) $5(\mathbf{AB})^T - 3\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

5. (a) Calculate both $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ and $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ for

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{and} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Calculate both $\mathbf{B}(\mathbf{AC})$ and $(\mathbf{BA})\mathbf{C}$.

6. Let $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, and $\mathbf{C}$ be as in Exercise 5. Calculate:

(a) both $\mathbf{AB}$ and $\mathbf{BA}$

(b) both $\mathbf{AC}$ and $\mathbf{CA}$

(c) $\mathbf{A}^2$

7. Let

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{and} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calculate $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ and $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

(b) Calculate $\mathbf{A}(\mathbf{B}^2)$ and $(\mathbf{AB})\mathbf{B}$.

8. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculate

(a) $\mathbf{A} * \mathbf{A}$ (b) $\mathbf{A} * \mathbf{A} * \mathbf{A}$

(c) $\mathbf{A} * \mathbf{A} * \cdots * \mathbf{A}$ for 17 factors

9. Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculate

(a) $\mathbf{A} * \mathbf{A}$ (b) $\mathbf{A} * \mathbf{A} * \mathbf{A}$

(c) $\mathbf{A} * \mathbf{A} * \cdots * \mathbf{A}$ for 72 factors

10. Draw a digraph associated with the matrix $\mathbf{A}$ of

(a) Exercise 8. (b) Exercise 9.

11. Let $\mathbf{M}$ be the adjacency matrix for the digraph in Example 1. One can check that $\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Use $\mathbf{M}^2$ to find the number of paths of length 2

(a) from v_1 to itself. (b) from v_1 to v_3.

(c) from v_1 to v_4. (d) from v_2 to v_1.

12. Let $\mathbf{A}$ be the Boolean matrix for the digraph in Example 1 and Exercise 11. Use $\mathbf{A} * \mathbf{A}$ to determine whether there are or are not paths of length 2

(a) from v_1 to itself. (b) from v_1 to v_3.

(c) from v_1 to v_4. (d) from v_2 to v_1.

13. (a) Calculate $\mathbf{M}^3$ for the adjacency matrix in Example 1.

(b) Find the number of paths of length 3 from v_3 to v_2.

(c) List the paths of length 3 from v_3 to v_2 using the labeling of Figure 2(b).

14. This exercise refers to the graph in Example 3.

(a) Draw the graph; just remove the arrowheads from Figure 2(a). Label the edges as in Figure 2(b).

(b) How many paths of length 2 are there from v_3 to itself?

(c) List the paths from v_3 to itself of length 2.

(d) How many paths of length 3 are there from v_3 to itself?

(e) List the paths from v_3 to itself of length 3.

15. Repeat parts (a) to (d) of Exercise 14 for the vertex v_2.

16. Show that a 2×2 matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ has an inverse if and only if $ad - bc \neq 0$, in which case the inverse is

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Hint: Try to solve $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ for x, y, z, and w.

17. Use Exercise 16 to determine which of the following matrices have inverses. Find the inverses when they exist and check your answers.

(a) $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. Find 2×2 matrices that show that $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ does not generally hold.

19. Show that if $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix and $\mathbf{B}$ is an $n \times p$ matrix, then $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. Note that both sides of the equality represent $p \times m$ matrices.

20. (a) Prove the cancellation law for $\mathfrak{M}_{m,n}$ under addition; i.e., prove that if $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ are in $\mathfrak{M}_{m,n}$ and $\mathbf{A}+\mathbf{C} = \mathbf{B}+\mathbf{C}$, then $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(b) Show that the cancellation law for $\mathfrak{M}_{n,n}$ under multiplication fails; i.e., show that $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ need not imply $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ even when $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$.

21. (a) Let $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ for some fixed a in $\mathbb{R}$. Show that $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ for all $\mathbf{B}$ in $\mathfrak{M}_{2,2}$.

(b) Consider a fixed matrix $\mathbf{A}$ in $\mathfrak{M}_{2,2}$ that satisfies $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ for all $\mathbf{B}$ in $\mathfrak{M}_{2,2}$. Show that

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{for some} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Hint: Write $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ and try $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

22. (a) Show directly that $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ for matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, and $\mathbf{C}$ in $\mathfrak{M}_{2,2}$.

(b) Did you enjoy part (a)? If yes, give a direct proof of the general associative law for matrices.

23. (a) Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be $m \times n$ matrices and let $\mathbf{C}$ be an $n \times p$ matrix. Show that the distributive law holds: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.

(b) Verify the distributive law $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$. First specify the sizes of the matrices for which this makes sense.

24. Show that if $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix, then

(a) $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$. (b) $\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$.

Answers

1. (a) $\begin{bmatrix} -8 & 13 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 31 & -16 & -6 \\ 29 & 4 & 26 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 0 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$.

3. The products written in parts (a) and (c) do not exist.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 8 & 11 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. (a) 2. (c) 2.

13. (a) $\mathbf{M}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 20 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $f\,a\,b$, $f\,a\,c$, $f\,b\,d$, $f\,b\,e$, $f\,c\,d$, $f\,c\,e$, $f\,h\,j$, $k\,j\,d$, $k\,j\,e$.

15. (a) Simply remove the arrows from Figure 2 on page 440.
(c) $d\,d$, $e\,e$, $d\,e$, $e\,d$, $b\,b$, $c\,c$, $b\,c$, $c\,b$, $j\,j$.

17. (a) $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$. (c) Not invertible.

19. For $1 \le k \le p$ and $1 \le i \le m$,

$$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)[k,i] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}^T[k,j]\mathbf{A}^T[j,i] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}[j,k]\mathbf{A}[i,j].$$

Compare with the (k,i)-entry of $(\mathbf{AB})^T$.

21. (a) In fact, $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = a\mathbf{B}$ for all $\mathbf{B}$ in $\mathfrak{M}_{2,2}$.
(b) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ with $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ forces $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, so $b = c = 0$. So $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Now try $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

23. (a) Consider $1 \le i \le m$ and $1 \le k \le p$, and compare the (i,k) entries of $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$ and $\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$.
(b) If $\mathbf{A}$ is $m \times n$, then $\mathbf{B}$ and $\mathbf{C}$ must both be $n \times r$ for the same r. For $1 \le i \le m$ and $1 \le k \le r$, show $(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))[i,k] = (\mathbf{AB}+\mathbf{AC})[i,k]$.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 27.01.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su funkcije (preslikavanja)? Koje od napisanih funkcija su bijekcije?

b) Dat je polinom $f(x) = (b - a)x^n + 2^n a - b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2 - 3x + 2$ bude $(2^n - 1)x$.

2. Neka je $S = \{(1, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ i neka je na S definisana binarna operacija zvjezdica $*$ sa $(1, a) * (1, b) = (\alpha, a + b + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Odrediti vrijednost parametra α tako da skup S bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.
b) Za dobijenu vrijednost parametra α pokazati da je $(S, *)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{array}{rl}
x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} - x_4 + 2x_5 &= 1 \\
x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2 \\
6x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 \phantom{{}-3x_4} - 2x_5 &= 3 \\
4x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= \lambda
\end{array}.$$

4. Odrediti t tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

(#) Dati su skupovi $A=\{a,b\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su f-je (preslikavanja)? Koje od napisanih f-ja su bijekcije?

Rj.

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$$

Binarna relacija je podskup od $A\times B$.

Binarne relacije ću označiti sa $\rho_1, \rho_2, \dots$

Binarne relacije su

$\rho_1=\emptyset$ $\quad \rho_5=\{(b,2)\}$ $\quad \rho_9=\{(a,2),(b,1)\}$ $\quad \rho_{13}=\{(a,1),(a,2),(b,2)\}$

$\rho_2=\{(a,1)\}$ $\quad \rho_6=\{(a,1),(a,2)\}$ $\quad \rho_{10}=\{(a,2),(b,2)\}$ $\quad \rho_{14}=\{(a,1),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_3=\{(a,2)\}$ $\quad \rho_7=\{(a,1),(b,1)\}$ $\quad \rho_{11}=\{(b,1),(b,2)\}$ $\quad \rho_{15}=\{(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_4=\{(b,1)\}$ $\quad \rho_8=\{(a,1),(b,2)\}$ $\quad \rho_{12}=\{(a,1),(a,2),(b,1)\}$ $\quad \rho_{16}=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

F-je (preslikavanja) su: $\rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}$.

Bijekcije su: ρ_8, ρ_9.

(#) Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$, $a,b\in\mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa x^2-3x+2 bude $(2^n-1)x$.

Rješenje

$f(x)$ je djeljiv sa $x-c$ akko je $f(c)=0$.

Ako $f(x)$ nije djeljiv sa $x-c$ ostatak pri djeljenju $f(x)$ sa $x-c$ iznosi $f(c)$.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b \longrightarrow f(1)=b-a+2^n a-b=2^n a-a=(2^n-1)a$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$f(2)=(b-a)2^n+2^n a-b=b2^n-a2^n+2^n a-b=2^n b-b=(2^n-1)b$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=(2^n-1)a\\ f(2)&=(2^n-1)b\end{aligned}\right\}\ \dots(1)$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=2^n-1\\ f(2)&=(2^n-1)\cdot 2\end{aligned}\right\}\ \dots(2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow \begin{aligned} a&=1\\ b&=2\end{aligned}$$

tražene vrijednosti

(#) Neka je $S=\{(1,a) \mid a\in\mathbb{Q}\}$ i neka je na S definisana binarna operacija $*$ sa $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

a) Odrediti vrijednost parametra α tako da skup S bude zatvoren u odnosu na operaciju $*$.

b) Za dobijenu vrijednost parametra α pokazati da je $(S,*)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

Rj. a) $(1,a)*(1,b)=(\alpha, a+b+1)$

Nama treba α t.d. $(\alpha, a+b+1)\in S$

$a+b+1\in\mathbb{Q}$. Prema tome $\alpha=1$.

b) Zatvorenost je zadovoljena (iz a)). Pokažimo da je operacija $*$ asocijativna, da $\exists$ inverzni i neutralni element.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z\in S \quad (x*y)*z=x*(y*z)$

Uzmimo tri proizvoljna elementa iz S, $(1,a),(1,b),(1,c)\in S$

$$\left.\begin{aligned}((1,a)*(1,b))*(1,c)&=(1,a+b+1)*(1,c)=(1,a+b+1+c+1)=(1,a+b+c+2)\\(1,a)*((1,b)*(1,c))&=(1,a)*(1,b+c+1)=(1,a+b+c+1+1)=(1,a+b+c+2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow *$ jest asocijativna

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall(1,a)\in S \quad \exists(1,a')\in S$ t.d. $\begin{aligned}(1,a)*(1,a')&=(1,a) \Rightarrow (1,a+a'+1)=(1,a)\\(1,a')*(1,a)&=(1,a) \Rightarrow (1,a'+a+1)=(1,a)\end{aligned}$

Neutralni element je $(1,-1)\in S$

INVERZNI ELEMENT

$\forall(1,a)\in S \quad \exists(1,a^*)\in S$ t.d. $\begin{aligned}(1,a)*(1,a^*)&=(1,-1)\\(1,a^*)*(1,a)&=(1,-1)\end{aligned}$

$(1,a)*(1,a^*)=(1,-1)$

$(1,a+a^*+1)=(1,-1) \qquad a+a^*+1=-1 \Rightarrow a^*=-a-2$

Inverzni element elementa $(1,a)$ je $(1,-a-2)$.

$(S,*)$ jest grupa.

Da li vrijedi KOMUTATIVNOST?

$(1,a)*(1,b)=(1,a+b+1)$

$(1,b)*(1,a)=(1,b+a+1)$ DA. Grupa jest Abelova.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned}x_1-x_2-x_4+2x_5&=1\\x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5&=2\\6x_1-x_3-2x_5&=3\\4x_1-x_3-2x_4+2x_5&=\lambda.\end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom.

$$\overline{A}=[A\mid b]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&0&-1&2&1\\1&1&-1&-3&4&2\\6&0&-1&0&-2&3\\4&0&-1&-2&2&\lambda\end{array}\right]\xrightarrow{II_v\leftrightarrow I_v}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\1&-1&0&-1&2&1\\6&0&-1&0&-2&3\\4&0&-1&-2&2&\lambda\end{array}\right]\xrightarrow{I_k\leftrightarrow II_k}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}x_2&x_1&x_3&x_4&x_5\end{array}\\\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\-1&1&0&-1&2&1\\0&6&-1&0&-2&3\\0&4&-1&-2&2&\lambda\end{array}\right]\end{array}$$

$$\xrightarrow{I_v+II_v}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\0&2&-1&-4&6&3\\0&6&-1&0&-2&3\\0&4&-1&-2&2&\lambda\end{array}\right]\xrightarrow[IV_v+II_v\cdot(-2)]{III_v+II_v\cdot(-3)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\0&2&-1&-4&6&3\\0&0&2&12&-20&-6\\0&0&1&6&-10&\lambda-6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{IV_v\leftrightarrow V_v}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\0&2&-1&-4&6&3\\0&0&1&6&-10&\lambda-6\\0&0&2&12&-20&-6\end{array}\right]\xrightarrow{IV_v+III_v\cdot(-2)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&-1&-3&4&2\\0&2&-1&-4&6&3\\0&0&1&6&-10&\lambda-6\\0&0&0&0&0&6-2\lambda\end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda=3$ $\quad \operatorname{rang}A=\operatorname{rang}\overline{A}=3<5 \Rightarrow$ Sistem ima ∞ mnogo rješenja

2 promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4=t$, $x_5=s$

$x_3+6x_4-10x_5=-3$

$x_3=-6t+10s-3$

$2x_1-x_3-4x_4+6x_5=3$

$2x_1=-6t+10s-3+4t-6s+3$

$2x_1=-2t+4s$

$x_1=-t+2s$

$x_2+x_1-x_3-3x_4+4x_5=2$

$x_2=t-2s-6t+10s-3+3t-4s+2$

$x_2=-2t+4s-1$

Rješenje sistema je $(-t+2s,-2t+4s-1,-6t+10s-3,t,s)$

2° $\lambda\neq3$ $\quad \operatorname{rang}A=3<4=\operatorname{rang}\overline{A}$ sistem nema rješenja

(#) Odrediti t tako da matrica $M=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&2&t\\3&6&-1\end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

Rj. Nenula vektor $\vec{v}$ zovemo svojstveni vektor od M ako je

$$M\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

$$M\vec{v}=\lambda\vec{v}$$
$$M\vec{v}-\lambda\vec{v}=0$$
$$(M-\lambda I)\vec{v}=0$$

$$\begin{bmatrix}5-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&t\\3&6&-1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina.

On ima ∞ mnogo rješenja akko $\det(M-\lambda I)=0$.

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&t\\3&6&-1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&t\\6&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(5-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-6t)=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6t-2)$$

Trebamo naći t takvo da je 3 nula polinoma $\lambda^2-\lambda-6t-2=0$

Za $\lambda=3$: $9-3-6t-2=0$ $\quad t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $\quad -6t-2=-6\cdot\frac{2}{3}-2=-4-2=-6$

$-6t+4=0$ $\quad$ tražena vrijednost za t

$6t=4$

$$\det(M-\lambda I)=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=(5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Svojstvene vrijednosti matrice M su -2, 3 i 5.

Za $\lambda_1=-2$ imamo $(M+2I)\vec{v}=0$

$$\begin{bmatrix}7&0&0\\1&4&2/3\\3&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}7v_1&=0\\v_1+4v_2+\tfrac{2}{3}v_3&=0\\3v_1+6v_2+v_3&=0\end{aligned}$$

$v_1=0$

$4v_2+\frac{2}{3}v_3=0 \quad (1)$

$6v_2+v_3=0 \quad (2)$

$(1)\cdot 3$: $12v_2+2v_3=0$ $\quad v_3=-6v_2$

$(2)\cdot 2$: $12v_2+2v_3=0$

$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}0\\s\\-6s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=-2$

Za $\lambda_2=3$:

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&2/3\\3&6&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}2v_1&=0\\v_1-v_2+\tfrac{2}{3}v_3&=0 \quad /\cdot 6\\3v_1+6v_2-4v_3&=0\end{aligned}$$

$v_1=0$

$-6v_2+4v_3=0$

$6v_2-4v_3=0$

$6v_2=4v_3$

$v_2=\frac{4}{6}v_3=\frac{2}{3}v_3$

$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}s\\s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=3$

Za $\lambda_3=5$:

$v_1-3v_2+\frac{2}{3}v_3=0 \quad /\cdot 3$

$3v_1+6v_2-6v_3=0$

$3v_1-9v_2+2v_3=0$

$3v_1+6v_2-6v_3=0 \quad -$

$-15v_2+8v_3=0$

$v_2=\frac{8}{15}v_3$

$3v_1-\cancel{9}^{3}\cdot\frac{8}{\cancel{15}_{5}}v_3+2v_3=0$

$3v_1=\frac{14}{5}v_3$

$v_1=\frac{14}{15}v_3$

$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}\frac{14}{15}s\\\frac{8}{15}s\\s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara λ_3

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Zenica, 10.02.2010.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A=\{2,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$ i $E=\{1,2,3,4,5,6\}$. Odrediti sve skupove X za koje važi $X\subseteq E$, $A\cap X=\{3,5\}$ i $B\cup X=E$.

b) S je skup uređenih parova (p,q), gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p,q)\rho(p',q')\Leftrightarrow pq'=qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

2. Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned}x\qquad\qquad+\quad 2z&=0\\(2\lambda-1)x+\quad y+\quad 4z&=2\\-3x+(\lambda+2)y+(\lambda+5)z&=\lambda+3\ .\end{aligned}$$

3. Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&3&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&0&-1\\-2&1&3\end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda. Riješiti jednačinu $B^{-1}XA=(3B-2I)^{-1}$.

4. Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix}$. Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

\# Dati su skupovi $A=\{2,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$ i $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.
Odrediti sve skupove X za koje važi

$$X \subseteq E, \quad A \cap X = \{3,5\}, \quad B \cup X = E.$$

Rj. $A \cap X = \{3,5\} \Rightarrow 3 \in X$ i $5 \in X$, $2 \notin X$

$B \cup X = E \Rightarrow 1 \in X$ i $3 \in X$ i $5 \in X$

a može biti $4 \in X$, $6 \in X$.

Prema tome $1,3,5$ su sigurno u X, dok 4 i 6 mogu ali i ne moraju biti.

$X=\{1,3,5\}$ ili $X=\{1,3,4,5\}$ ili $X=\{1,3,5,6\}$ ili $X=\{1,3,4,5,6\}$.

(#) S je skup uređenih parova (p, q) gdje su p i q cijeli pozitivni brojevi, a relacija ρ (ro) je definisana na sljedeći način $(p,q)\,\rho\,(p',q') \Leftrightarrow pq' = qp'$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije.

Rj.

REFLEKSIVNOST

$\underline{\forall}\,\underline{(p,q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad (p,q)\,\rho\,(p,q)$

$(p,q)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow pq = qp$ što je tačno za svaki izbor cijelih pozitivnih brojeva p i q

ρ jest refleksivna relacija

SIMETRIČNOST

$\underline{\forall}\,\underline{(p,q)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2} \quad \forall (r,s)\in\mathbb{N}^2 \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \Rightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr \Rightarrow rq = sp \Leftrightarrow (r,s)\,\rho\,(p,q)$

$(r,s)\,\rho\,(p,q) \Leftrightarrow rq = sp$

ρ jest simetrična relacija

TRANZITIVNOST

$\underline{\forall}\,\underline{((p,q),(r,s),(a,b)}\,\underline{\in \mathbb{N}^2)} \quad (p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \Leftrightarrow ps = qr$

$(r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow rb = as$

$(p,q)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow pb = qa$

$(p,q)\,\rho\,(r,s) \wedge (r,s)\,\rho\,(a,b) \Leftrightarrow ps = qr \wedge rb = sa \Rightarrow$

$\Rightarrow ps\cdot rb = qr\cdot sa \Rightarrow pb\cdot rs = qa\cdot rs \xRightarrow{/:rs} pb = qa$

$\Leftrightarrow (p,q)\,\rho\,(a,b)$ ρ jest tranzitivna relacija

ρ je relacija ekvivalencije q.e.d.

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati njegova rješenja u zavisnosti od parametra λ

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad + 2z &= 0 \\ (2\lambda-1)x + y + 4z &= 2 \\ -3x + (\lambda+2)y + (\lambda+5)z &= \lambda+3 \end{aligned}$$

Rj. Riješit ćemo sistem Kramerovom metodom

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 1 & 4 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v - I_v\cdot 2}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6-4\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \lambda+11 - (6\lambda+12-4\lambda^2-8\lambda)$$

$$= \lambda+11+4\lambda^2+2\lambda-12 = 4\lambda^2+3\lambda-1 = (\lambda+1)(4\lambda-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda+3 & \lambda+2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 2(2\lambda+4-\lambda-3) = 2(\lambda+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2\lambda-1 & 2 & 4 \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+5 \end{vmatrix} \overset{III_v + I_v\cdot(-2)}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 2 & 6-4\lambda \\ -3 & \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6-4\lambda \\ \lambda+3 & \lambda+11 \end{vmatrix} = 2\lambda+22 - (18-6\lambda-4\lambda^2) =$$

$$= 2\lambda+22-18+6\lambda+4\lambda^2 = 4\lambda^2+8\lambda+4 = 4(\lambda+1)^2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\lambda-1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda+2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda+3-2\lambda-4 = -\lambda-1 = (-1)(\lambda+1)$$

Diskusija

1° $\lambda \neq -1$; $\lambda \neq \frac{1}{4}$ $\Rightarrow D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+1)(4\lambda-1)} = \frac{2}{4\lambda-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{4(\lambda+1)}{4\lambda-1}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{4\lambda-1}, \quad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1, \tfrac{1}{4}\}$$

2° $\lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow D = 0;\ D_x \neq 0$ sistem nema rješenje

3° $\lambda = -1 \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0$ sistem trebamo riješiti na drugi način

Za $\lambda = -1$ sistem postaje

$$\begin{aligned} x + 0y + 2z &= 0 \\ -3x + y + 4z &= 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \quad + 2z &= 0 \quad /\cdot 2 \\ -3x + y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x \quad + 4z &= 0 \\ -\ \ -3x + y + 4z &= 2 \\ \hline 5x - y &= -2 \\ y &= 5x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + \overbrace{5x+\cancel{2}}^{y} + 4z &= \cancel{2} \\ 2x + 4z &= 0 \quad /:2 \\ 2z &= -x \\ z &= -\tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

Sistem ima ∞ mnogo rješenja oblika $(t, 5t+2, -\frac{1}{2}t)$, $t\in\mathbb{R}$

\# Date su matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, a I je jedinična matrica trećeg reda.
Riješiti jednačinu $B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1}$.

Rj.

$B^{-1}\cdot X\cdot A=(3B-2I)^{-1} \quad /\cdot B$ sa lijeve str.

$X\cdot A=B(3B-2I)^{-1} \quad /\cdot A^{-1}$ sa desne strane

$X=B\underbrace{(3B-2I)}_{C}^{-1}\cdot A^{-1}$

$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}$

$$C=3B-2I=\begin{bmatrix}6 & -9 & 0\\ 3 & 0 & -3\\ -6 & 3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -9 & 0\\ 3 & -2 & -3\\ -6 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{\det C}\cdot C_{kof}^{T}$$

$$\det C=\begin{vmatrix}4 & -9 & 0\\ 3 & -2 & -3\\ -6 & 3 & 7\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}4 & -9 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v\cdot(-4)}{=\!=}\begin{vmatrix}0 & -21 & -28\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 3 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-21 & -28\\ -2 & -3\end{vmatrix}=63-56=7$$

$C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-14+9=-5$ $\quad C_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-9 & 0\\ 3 & 7\end{vmatrix}=63$ $\quad C_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-9 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}=27$

$C_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & 7\end{vmatrix}=(-1)(21-18)=-3$ $\quad C_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 0\\ -6 & 7\end{vmatrix}=28$ $\quad C_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & -3\end{vmatrix}=12$

$C_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & -2\\ -6 & 3\end{vmatrix}=9-12=-3$ $\quad C_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}4 & -9\\ -6 & 3\end{vmatrix}=-(12-54)=42$ $\quad C_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}4 & -9\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-8+27=19$

$$C_{kof}=\begin{bmatrix}-5 & -3 & -3\\ 63 & 28 & 42\\ 27 & 12 & 19\end{bmatrix}\qquad C^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5 & 63 & 27\\ -3 & 28 & 12\\ -3 & 42 & 19\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A_{kof}^{T}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4+4=8$$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3+1=4$ $\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2$ $\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$ $\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$ $\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3+4=7$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

$$X=B\cdot C^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-5 & 63 & 27\\ -3 & 28 & 12\\ -3 & 42 & 19\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 7\end{bmatrix}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-92 & 26 & 242\\ -44 & 10 & 106\\ -58 & 17 & 169\end{bmatrix}=\frac{1}{56}\begin{bmatrix}-52 & 22 & 166\\ -34 & 9 & 73\\ -34 & 9 & 129\end{bmatrix}$$ traženo rješenje

\# Neka su date matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.
Pokazati da A i B imaju različite karakteristične polinome (pa prema tome nisu slične), ali imaju isti minimalni polinom. Prema tome neslične matrice mogu imati isti minimalni polinom.

Rj.

Karakteristični polinom matrice A je polinom oblika $k(\lambda)=\det(\lambda I-A)$.

$$k(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

Karakteristični polinom matrice B je polinom oblika $p(\lambda)=\det(\lambda I-B)$

$$p(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$$k(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)\neq(\lambda-2)^2(\lambda-1)=p(\lambda)$$

Matrice A i B imaju različite karakteristične polinome.
Minimalni polinom matrice A $m(\lambda)$ mora dijeliti $k(\lambda)$. Također svaki nesvodljivi faktor od $k(\lambda)$ tj. $\lambda-1$ i $\lambda-2$ su također faktori od $m(\lambda)$. Prema tome $m(\lambda)$ može biti tačno jedan od sljedeća dva polinoma $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ ili $g(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.
Izračunajmo
$$f(A)=(A-2I)(A-I)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Minimalni polinom matrice A je $m(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$.

Na potpuno isti način (za vježbu) pokažemo da je $n(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$ minimalni polinom matrice B.

Matrice A i B imaju isti minimalni polinom,

q.e.d.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 15.06.2011.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Neka su dati skupovi $A = \{10k + 7 \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{4p + 13 \,|\, p \in \mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A \cap B \neq \emptyset$.

b) Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Neka je $\rho \subseteq A \times A$ zadana ovako
$\rho = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, b), (d, d), (d, e), (e, e), (e, d), (f, f)\}$.
Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A.

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}$.

b) Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra t

$$\begin{aligned} 2x - \ y + \ 3z &= -7 \\ x + 2y - \ 6z &= t \\ tx + 5y - 15z &= 8\ . \end{aligned}$$

4. Neka je $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_4 \; i \; x_5 = 0\}$. Sabiranje u V je definisano na uobičajen način
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ kao i množenje sa skalarom $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5)$. Dokažite da je V vektorski prostor te mu nađite neku bazu i odredite dimenziju.

(#) Neka su dati skupovi $A=\{10k+7 \mid k\in\mathbb{N}\}$ i $B=\{4p+13 \mid p\in\mathbb{N}\}$. Dokazati da je $A\cap B\neq\emptyset$. Odgovor obrazložiti!

Rj. Pokušajmo naći broj a koji je element i skupa A i skupa B. Neka je $a=10k+7=4p+13$ za neko $k\in\mathbb{N}$ i neko $p\in\mathbb{N}$.

$$10k+7=4p+13$$

$$10k-4p=6$$

$$2(5k-2p)=6 \quad /:2$$

$$5k-2p=3$$

Odavde vidimo da za $k=1$ i $p=1$ imamo $5-2=3$ tj.

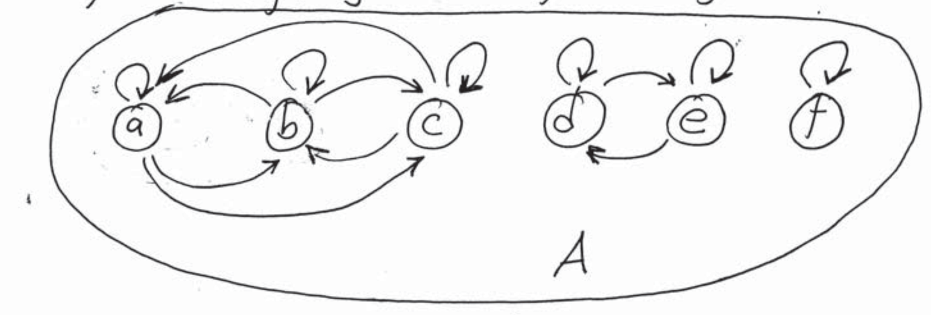
$$17\in A \ \text{ i } \ 17\in B$$

$$A\cap B\neq\emptyset$$

q.e.d.

(#) Neka je $A=\{a,b,c,d,e,f\}$. Neka je $\rho\subseteq A\times A$ zadana ovako $\rho=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(e,e),(e,d),(f,f)\}$. Dokazati da je ρ (ro) relacija ekvivalencije u A.

Rj. Nacrtajmo relaciju ρ kao orjentisan graf



REFLEKSIVNOST

$\forall x\in A \quad (x,x)\in\rho$ svaki element skupa A je u relaciji sam sa sobom jest refleksivno

SIMETRIČNOST

$\forall x,y\in A \quad (x,y)\in\rho \Rightarrow (y,x)\in\rho$

svaki element x skupa A koji je u vezi sa y imamo da je i y u vezi sa x.

ρ jest simetrično

TRANZITIVNOST

$\forall x,y,z\in A \quad (x,y)\in\rho \wedge (y,z)\in\rho \Rightarrow (x,z)\in\rho$

ako je x u vezi sa y i y u vezi sa z tada je i x u vezi sa z.

ρ jest tranzitivno

ρ jest relacija ekvivalencije q.e.d.

Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}.$$

Rj. Izračunajmo prvo determinante drugog, trećeg i četvrtog tipa

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 1+a-a^2=1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1+a & a \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{II_v-I_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{II_v-I_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{IV_v-III_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{II_v-I_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{III_v-II_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{IV_v-III_v \\ V_v-IV_v \\ \vdots \\ n-1\text{-vrsta minus } n-2 \text{ vrsta}}}{=} \dots = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix} \overset{\substack{n\text{-ta vrsta} \\ \text{minus } n-1 \text{ vrsta}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \leftarrow$ tražena vrijednost determinante

II način: MATEMATIČKOM INDUKCIJOM

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Provjeriti da li je $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

Rj.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{kof}^{T}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{II_v-I_v \\ III_v-I_v \\ IV_v-I_v}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{II_k-III_k}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(4+4) = -16$$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_v+II_v}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_k+III_k}{=} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_k+III_k}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1-1) = -4$$

$$A_{14} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{I_v+II_v}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_v+II_v}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1-1) = -4$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{II_v+III_v}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1+1) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{I_v+II_v}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-1-1) = 4$$

$$A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=2(1+1)=4$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=2(-1-1)=-4$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(1+1)=-4$$

$$A_{34}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+III_v}{=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{41}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=}-\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=(-2)(1+1)=-4$$

$$A_{42}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}\overset{I_v+II_v}{=\!=}\begin{vmatrix}2&0&0\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&-1\\1&-1\end{vmatrix}=2(1+1)=4$$

$$A_{43}=(-1)^7\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=}-\begin{vmatrix}2&1&1\\0&1&-1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=(-2)(-1-1)=4$$

$$A_{44}=(-1)^8\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}\overset{II_v+III_v}{=\!=}\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=(-2)(1+1)=-4$$

$$A_{kof}=\begin{bmatrix}-4&-4&-4&-4\\-4&-4&4&4\\-4&4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{bmatrix}$$

Možemo primjetiti da je ova matrica simetrična pa je $A_{kof}=A_{kof}^T$

$$A^{-1}=\frac{-1}{16}\begin{bmatrix}-4&-4&-4&-4\\-4&-4&4&4\\-4&4&-4&4\\-4&4&4&-4\end{bmatrix}=\frac{-1}{16}(-4)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

Prema tome jednakost $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ važi.

(#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra t:

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7\\x+2y-6z&=t\\tx+5y-15z&=8.\end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&2&-6\\t&5&-15\end{vmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot 2}{=\!=}\begin{vmatrix}2&-1&3\\5&0&0\\t&5&-15\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}-1&3\\5&-15\end{vmatrix}=(-5)(15-15)=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-7&-1&3\\t&2&-6\\8&5&-15\end{vmatrix}\overset{III_v+I_v\cdot 5}{=\!=}\begin{vmatrix}-7&-1&3\\t&2&-6\\-27&0&0\end{vmatrix}=(-27)\underbrace{\begin{vmatrix}-1&3\\2&-6\end{vmatrix}}_{6-6}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&-7&3\\1&t&-6\\t&8&-15\end{vmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot 2}{\underset{III_v+I_v\cdot 5}{=\!=}}\begin{vmatrix}2&-7&3\\5&t-14&0\\t+10&-27&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5&t-14\\t+10&-27\end{vmatrix}=3(-135-\overbrace{(t-14)(t+10)}^{t^2-4t-140})$$

$$=3(-135-t^2+4t+140)=(-3)(t^2-4t-5)=(-3)(t-5)(t+1)$$

$D=16+20=36 \quad t_{1,2}=\frac{4\pm 6}{2} \quad t_1=-1 \quad t_2=5$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&-1&-7\\1&2&t\\t&5&8\end{vmatrix}\overset{II_v+I_v\cdot 2}{\underset{III_v+I_v\cdot 5}{=\!=}}\begin{vmatrix}2&-1&-7\\5&0&t-14\\t+10&0&-27\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&t-14\\t+10&-27\end{vmatrix}=-(t-5)(t+1)$$

Diskusija

1° $t\neq 5$; $t\neq -1$ sistem nema rješenja ($D=0$ ali $D_y\neq 0$; $D_z\neq 0$)

2° $t=5$

$D=D_x=D_y=D_z=0$. sistem ćemo riješiti Gausovom metodom.

Sistem postaje

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7 \quad (1)\\x+2y-6z&=5 \quad (2)\\5x+5y-15z&=8 \quad (3)\end{aligned}$$

$(2)+(1)\cdot 2:\ 5x=-9 \Rightarrow x=-\frac{9}{5}$

$(2)\Rightarrow -\frac{9}{5}+2y-6z=5 \quad /\cdot 5$

$-9+5y-15z=8$

$10y-30z=34$

$5y-15z=17$

$z=s$

$y=\frac{15s+17}{5}$

Rješenje sistema je $\left(-\frac{9}{5},\frac{15s+17}{5},s\right)$, $s\in\mathbb{R}$.

3° $t=-1$, $D=D_x=D_y=D_z$ sistem postaje

$$\begin{aligned}2x-y+3z&=-7 \quad (I)\\x+2y-6z&=-1 \quad (II)\\-x+5y-15z&=8 \quad (III)\end{aligned}$$

$(II)+(I)\cdot 2:\ 5x=-15$

$x=-3$

$(I)\Rightarrow -y+3z=-1$

Rješenje sistema je $(-3, 3u+1, u)$, $u\in\mathbb{R}$

(#) Neka je $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 \mid x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4 \text{ i } x_5=0\}$. Dokažite da je V vektorski prostor te nađite mu neku bazu i dimenziju.

Rj: Sabiranje u V je definisano na uobičajen način

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)+(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)$

kao i množenje sa skalarom α

$\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4,\alpha x_5)$.

Vektorski prostor (ili linearni prostor) je uređena četvorka $(X,+,\cdot,F)$ gdje je F polje, a $\cdot$ je f-ja sa $F\times X$ u X, čiju vrijednost (α,x) označavamo sa αx tako da za $\alpha,\beta\in F$ i $x,y\in X$ vrijedi

i) $(X,+)$ je Abelova grupa

ii) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$

iii) $1\cdot x=x$ gdje je 1 multiplikativna jedinica od F

iv) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ i $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Članove od X zovemo vektori, a članove iz F zovemo skalari. Operaciju $\cdot$ zovemo skalarno množenje. Zbog kratkoće vektorski prostor $(X,+,\cdot,F)$ često označavamo sa X i kažemo da je X vektorski prostor nad poljem F.

(I) $(V,+)$ je Abelova grupa

zatvorenost $(\forall\vec a,\vec b\in V\ \vec a+\vec b\in V)$

$\underbrace{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}_{\vec a},\underbrace{(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)}_{\vec b}\in\mathbb{R}^5$ $\quad\vec a+\vec b=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)\in\mathbb{R}^5$.

Kako je $x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4$ i $x_5=0$ i $y_1-y_2=y_2-y_3=y_3-y_4$ i $y_5=0$ to

$(x_1+y_1)-(x_2+y_2)=(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=(x_3+y_3)-(x_4+y_4)$ i $x_5+y_5=0$ to $\vec a+\vec b\in V$

Operacija + je zatvorena u V

asocijativnost $(\forall\vec a,\vec b,\vec c\in V,\ (\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c))$

$(\vec a+\vec b)+\vec c=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)+(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=((x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3,$
$(x_4+y_4)+z_4,(x_5+y_5)+z_5)=(x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3),x_4+(y_4+z_4),x_5+(y_5+z_5))=$
$=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3,y_4+z_4,y_5+z_5)=\vec a+(\vec b+\vec c)$ + je asocijativna u V

neutralni element $(\forall\vec a\in V\ \exists\vec o\in V$ t.d. $\vec a+\vec o=\vec o+\vec a=\vec a)$

$\vec o=(0,0,0,0,0)$ $\quad\vec o\in V$ zato što je $0-0=0-0=0-0$ i $x_5=0$.

$\vec o$ jest neutralni element za + u V

inverzni element $(\forall\vec a\in V\ \exists-\vec a\in V$ t.d. $\vec a+(-\vec a)=(-\vec a)+\vec a=\vec o)$

Inverzni element elementa (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) je $(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,-x_5)$

(kako je $x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4$ to je $-x_1+x_2=-x_2+x_3=-x_3+x_4$)

element $(-x_1,-x_2,-x_3,-x_4,-x_5)$ jest inverzni element za $\forall(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in V$.

komutativnost $(\forall\vec a,\vec b\in V\ \ \vec a+\vec b=\vec b+\vec a)$

$\vec a+\vec b=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)=(y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3,y_4+x_4,y_5+x_5)=\vec b+\vec a$

+ jest komutativno u V $\quad (V,+)$ jest Abelova grupa q.e.d.

(II) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall\vec a\in V\quad \alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$

$\alpha(\beta\vec a)=\alpha\cdot(\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3,\beta x_4,\beta x_5)=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2),\alpha(\beta x_3),\alpha(\beta x_4),\alpha(\beta x_5))$
$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2,(\alpha\beta)x_3,(\alpha\beta)x_4,(\alpha\beta)x_5)=(\alpha\beta)\vec a$ tj. $\alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$ q.e.d.

(III) $\forall\vec a\in V\quad 1\cdot\vec a=\vec a\quad(1\in\mathbb{R})$

trivijalno $1\cdot(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ tj. $1\cdot\vec a=\vec a$ q.e.d.

(IV) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall\vec a,\vec b\in V\quad \alpha(\vec a+\vec b)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$ i $(\alpha+\beta)\vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$

$\alpha(\vec a+\vec b)=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,x_4+y_4,x_5+y_5)=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\alpha x_3+\alpha y_3,$
$\alpha x_4+\alpha y_4,\alpha x_5+\alpha y_5)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3,\alpha x_4,\alpha x_5)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\alpha y_3,\alpha y_4,\alpha y_5)$
$=\alpha\vec a+\alpha\vec b$, dobili smo $\alpha(\vec a+\vec b)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$ q.e.d.

ZA VJEŽBU POKAZAT DA JE $(\alpha+\beta)\vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$.

Prema tome V je vektorski prostor.

II način: Možemo pokazati da je V vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^5$.

Nađimo sad bazu vektorskog prostora V.

Skup vektora $(\vec v_1,\vec v_2,\vec v_3,\dots,\vec v_n)$ koji su linearno nezavisni i koji generišu vektorski prostor V zovemo bazu.

Baza za vektorski prostor $\mathbb{R}^5$ je $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$
$(0,0,0,0,1)$. Iskoristimo ovu bazu i formirajmo bazu za naš prostor V.

Prema pretpostavci: $x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4$ i $x_5=0$.

Ako uzmemo $x_1=0$, $x_2=1 \Rightarrow x_3=2$ i $x_4=3$.

Ako uzmemo $x_2=0$, $x_3=1 \Rightarrow x_4=2$ i $x_1=-1$

Ako uzmemo $x_3=0$, $x_4=1 \Rightarrow x_2=-1$ i $x_1=-2$

Moguća baza za V je $\{(0,1,2,3,0),(-1,0,1,2,0),(-2,-1,0,1,0)\}$

Provjerimo da li je ovaj sistem linearno zavisan.

$$\alpha(0,1,2,3,0)+\beta(-1,0,1,2,0)+\gamma(-2,-1,0,1,0)=(0,0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned}
-\beta-2\gamma&=0 \quad (a)\\
\alpha-\gamma&=0 \quad (b)\\
2\alpha+\beta&=0 \quad (c)\\
3\alpha+2\beta+\gamma&=0 \quad (d)
\end{aligned}$$

Riješimo se γ.

$(a)+(b)(-2)$: $-2\alpha-\beta=0$

(c): $2\alpha+\beta=0$

$(d)+(b)$: $4\alpha+2\beta=0$

$2\alpha+\beta=0$

$\alpha=1 \Rightarrow \beta=-2$

$\gamma=1$

Kako smo dobili $\alpha\neq0$ (i $\beta\neq0$ i $\gamma\neq0$) sistem nije linearno nezavisan pa nije i baza. Izbacimo jedan element iz baze. Nova moguća baza za V je $\{(0,1,2,3,0),(-2,-1,0,1,0)\}$. Ispitajmo linearnu zavisnost.

$$\alpha(0,1,2,3,0)+\beta(-2,-1,0,1,0)=0$$

$$\begin{aligned}
-2\beta&=0\\
\alpha-\beta&=0\\
2\alpha&=0\\
3\alpha+\beta&=0\\
\hline
\alpha=\beta&=0
\end{aligned}$$

Sistem $\{(0,1,2,3,0),(-2,-1,0,1,0)\}$ je linearno nezavisan i on je baza za vektorski prostor V.

$\therefore$ Dimenzija vektorskog prostora V je 2.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 30.06.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. (40%) **(a)** Neka su $x=2a+3$ i $y=4a+9$, $a\in\mathbb{N}$ prirodni brojevi
I) dokazati da je broj $(x+y)(y-x)$ djeljiv sa 24;
II) odrditi ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.
Odgovore obrazložiti!

(60%) **(b)** Neka su (a,b) i (c,d) elementi iz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definišimo relaciju $\leq$ na sljedeći način: $(a,b)\leq(c,d)$ akko je ili $a<c$ ili ($a=c$ i $b\leq d$). Dokazati da je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i da zadovoljava zakon trihotomije (prisjetimo se relacija $\leq\subseteq P\times P$ zadovoljava zakon trihotomije na nekom skupu P akko $\forall x,y\in P$ imamo $x\leq y$ ili $y\leq x$).

2. **a)** Izračunati determinantu n-tog reda
$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

b) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu $\left\{\begin{bmatrix} a & a-b\\ 0 & b\end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

3. Diskutovati rješenja sistema u u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned}
5x_1-3x_2+2x_3+\ 4x_4&=3\\
4x_1-2x_2+3x_3+\ 7x_4&=1\\
3x_1-6x_2-\ x_3-\ 5x_4&=9\\
7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda\ .
\end{aligned}$$

4. Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Neka su $x=2a+3$; $y=4a+9$, $a\in\mathbb{N}$ prirodni brojevi.
a) dokazati da je broj $(x+y)(y-x)$ djeljiv sa 24;
b) odrediti ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x.
Odgovore obrazložiti!

Rj. a) $(x+y)(y-x)=(2a+3+4a+9)(4a+9-2a-3)=(6a+12)(2a+6)=$

$=6(a+2)\,2.(a+3)=12(a+2)(a+3)$

Posmatrajmo brojeve $12(a+2)(a+3)$ i 24.

Ako je a paran broj $(a=2k)$ (za neko $k\in\mathbb{N}$) tada

$12(2k+2)(2k+3)=24(k+1)(2k+3)$

pa je $(x+y)(y-x)$ djeljiv sa 24.

Ako je a neparan broj ($a=2k+1$ za neko $k\in\mathbb{N}$) tada

$12(a+2)(a+3)=12(2k+1+2)(2k+1+3)=\underbrace{12\cdot 2}_{=24}(2k+3)(k+2)$

pa je i u ovom slučaju $(x+y)(y-x)$ djeljivo sa 24.

Broj $(x+y)(y-x)$ je djeljiv sa 24.

b) $y:x=(4a+9):(2a+3)=\dfrac{4a+9}{2a+3}=\dfrac{2a+3+2a+3+3}{2a+3}=2+\dfrac{3}{2a+3}$

Ostatak pri djeljenju broja y sa brojem x je 3 (ostatak je uvijek cio broj), dok je izraz $\dfrac{3}{2a+3}$ decimalni dio broja $\dfrac{y}{x}$.

II način:

$$\begin{array}{l}(4a+9):(2a+3)=2\\ \underline{-\ 4a+6}\\ \quad\ \ 3\end{array}$$

ostatak je 3.

(#) Neka su (a,b) i (c,d) elementi iz $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definišimo $(a,b)\leq(c,d)$ ako je ili $a<c$ ili $(a=c$ i $b\leq d)$.
Dokazati da je relacija $\leq$ relacija totalnog poretka.

Rj. Za relaciju $\leq$ kažemo da je relacija totalnog poretka na nekom skupu P akko je $\leq\,\subseteq P\times P$ tako da $\forall x,y,z\in P$ zadovoljava
a) $x\leq x$ (refleksivnost);
b) $x\leq y$ i $y\leq x$ povlači $x=y$ (antisimetričnost);
c) $x\leq y$ i $y\leq z$ povlači $x\leq z$ (tranzitivnost) i
d) $x\leq y$ ili $y\leq x$ (zakon trihotomije)

REFLEKSIVNOST

$\forall (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (a,a)\leq(a,a)$

po našoj definiciji relacije $\leq$ ili je $a<a$ ili je $a=a$ i $a\leq a$
kako važi $a=a$ i $a\leq a$ relacija $\leq$ jest refleksivna

ANTISIMETRIČNOST

$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (a,b)\leq(c,d)$ i $(c,d)\leq(a,b) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$

$(a,b)\leq(c,d) \overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $a<c$ ili $(a=c$ i $b\leq d)$

$(c,d)\leq(a,b) \overset{\text{po def.}}{\Longleftrightarrow}$ ili $c<a$ ili $(c=a$ i $d\leq b)$ ...(2)

Kako istovremeno ne može biti $a<c$ i neka tvrdnja iz (2) to mora biti $a=c$ i $b=d$ tj. $(a,b)=(c,d)$
Relacija $\leq$ je antisimetrična.

TRANZITIVNOST

$\forall (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \quad (a,b)\leq(c,d)$ i $(c,d)\leq(e,f) \Rightarrow (a,b)\leq(e,f)$

$$\left.\begin{array}{l} (a,b)\leq(c,d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee a=c \text{ i } b\leq d \\ (c,d)\leq(e,f) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c<e \vee c=e \text{ i } d\leq f \end{array}\right\} \Rightarrow a<e \vee a=e \text{ i } b\leq f$$

Relacija $\leq$ je tranzitivna

TRIHOTOMIJA

$$\left.\begin{array}{l} (a,b)\leq(c,d) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a<c \vee b\leq d \text{ i } a=c \\ (c,d)\leq(a,b) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} c<a \vee d\leq b \text{ i } c=a \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b)\leq(c,d) \text{ ili } (c,d)\leq(a,b)$$

Važi zakon trihotomije.

Relacija $\leq$ je relacija totalnog poretka q.e.d

(#) Izračunati determinantu n-tog reda

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Rj. Izračunajmo prvo determinante trećeg i četvrtog tipa.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x+1)+(x+1)=(x^2+1)(x+1) = x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{II_v+I_v}{=\!=}$$

$$= x^3(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3(x+1) + \underbrace{\overset{x^2+x+1}{\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}}}_{\text{determinanta drugog tipa}} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}_{n\times n} \overset{\text{razvijamo po prvoj koloni}}{=\!=\!=} (x+1)\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{II_v+I_v}{=\!=\!=} x^{n-1}(x+1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix} = x^{n-1}(x+1) + \underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}}_{\text{naša determinanta } (n-2)\text{gog tipa}} =$$

$= x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1$ ← Tražena vrijednost determinante

II način MATEM. INDUKCIJOM

(#) Odrediti strukturu koju množenje matrica čini na skupu
$$\left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R} \right\}.$$

Rj. $M \overset{def}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R} \right\}$

Da li je skup M zatvoren? ($\forall A,B\in M \ \ A\cdot B\in M$)

$A=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac-ad+ad-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}$$

Vidimo da $A\cdot B\in M \Rightarrow$ množenje matrica je zatvoreno u M

Da li je množenje u skupu M asocijativno? ($\forall A,B,C\in M \ \ (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$)

$$(A\cdot B)\cdot C=\left(\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & ac-bd \\ 0 & bd \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} ace & ace-acf+acf-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ace & ace-bdf \\ 0 & bdf \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ce & ce-df \\ 0 & df \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c & c-d \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e-f \\ 0 & f \end{bmatrix}\right)$$

Množenje u M je asocijativno

Da li u M postoji neutralni element? ($\forall A\in M \ \exists E\in M \ \ A\cdot E=E\cdot A=A$)

Matrica $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pripada skupu M i očigledno $A\cdot E=E\cdot A=A \ \ \forall A\in M$

Postoji neutralni element u M.

Da li u M postoji inverzni element? ($\forall A\in M \ \exists A^{-1}\in M \ \ A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$)

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 & e_1-e_2 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} ae_1=1 \Rightarrow e_1=\frac{1}{a} \\ be_2=1 \Rightarrow e_2=\frac{1}{b} \end{array}$$

Prema tome $\begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \Rightarrow$ M ima inverzni element.

ZA VJEŽBU POKAZATI DA JE MNOŽENJE KOMUTATIVNO U M.

Prema tome množenje matrica čini skup M Abelovom grupom.

(#) Diskutovati rješenja sistema u zavisnosti od parametra λ:

$$\begin{aligned} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4&=3 \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4&=1 \\ 3x_1-6x_2-x_3-5x_4&=9 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda \end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right]$$

$$\underset{I_k \leftrightarrow III_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right] \end{array} \underset{IV_v+I_v\cdot 7}{\overset{\substack{II_v+I_v\cdot 3 \\ III_v+I_v\cdot 2}}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & -20 & 13 & -8 & 28 \\ 0 & -15 & 11 & -6 & 21 \\ 0 & -45 & 28 & -18 & \lambda+63 \end{array}\right]$$

$$\underset{II_v:(-4)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -\frac{13}{4} & 2 & -7 \\ 0 & -15 & 11 & -6 & 21 \\ 0 & -45 & 28 & -18 & \lambda+63 \end{array}\right] \underset{IV_v+II_v\cdot 9}{\overset{III_v+II_v\cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 5 & -\frac{13}{4} & 2 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

$$\underset{III_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_2 & x_4 & x_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & -5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & -\frac{13}{4} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \lambda \end{array}\right] \end{array} \overset{III_v+IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -6 & -5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 2 & -\frac{13}{4} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

Diskusija

1° $\lambda\neq 0$ $\quad$ rang $A<$ rang $\bar{A} \Rightarrow$ sistem nema rješenja

2° $\lambda=0$ $\quad$ rang $A=$ rang $\bar{A}<4 \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja
(jednu promjenjivu ćemo uzeti proizvoljno)

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4+3x_1&=9 \\ 5x_2+2x_4-\tfrac{13}{4}x_1&=-7 \\ \tfrac{5}{4}x_1&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow x_1=0$$

$$\begin{aligned} -x_3-6x_2-5x_4&=9 \quad /\cdot 2 \\ 5x_2+2x_4&=-7 \quad /\cdot 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x_3-12x_2-10x_4&=18 \\ + \quad 25x_2+10x_4&=-35 \\ \hline -2x_3+13x_2&=-17, \quad x_2=s \end{aligned}$$

$x_3=\dfrac{13s+17}{2}$

$2x_4=-5x_2-7 \Rightarrow x_4=\dfrac{-5s-7}{2}$

Rješenje sistema je $\left(0, s, \frac{13s+17}{2}, \frac{-5s-7}{2}\right)$, $s\in\mathbb{R}$.

(#) Naći svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice $A=\begin{bmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, gdje je $\vec{v}\neq\vec{0}$.

$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$, gdje je $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ je homogeni sistem linearnih jednačina, i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\-1&5-\lambda&-1\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}3-\lambda&-1&1\\3-\lambda&5-\lambda&-1\\3-\lambda&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&5-\lambda&-1\\1&-1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\frac{II_v-I_v}{III_v-I_v}(3-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&6-\lambda&-2\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}6-\lambda&-2\\0&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su 2, 3 i 6.

Za $\lambda=2$ imamo

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&3&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}x_1-x_2+x_3&=0 \quad (1)\\-x_1+3x_2-x_3&=0 \quad (2)\\x_1-x_2+x_3&=0 \quad (3)\end{aligned}$$

$(1)\equiv(3)$

$(1)+(2)$: $2x_2=0$, $x_2=0$

$x_1+x_3=0$

$x_3=s \Rightarrow x_1=-s$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda=2$ odgovara svojstveni vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}-s\\0\\s\end{bmatrix}$, $s\in\mathbb{R}$, $s\neq 0$

Za $\lambda=3$

$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}-x_2+x_3&=0 \quad (a)\\-x_1+2x_2-x_3&=0 \quad (b)\\x_1-x_2&=0 \quad (c)\end{aligned}$$

$\left.\begin{aligned}(a)&\Rightarrow x_2=x_3\\(c)&\Rightarrow x_1=x_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=m$, $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Svojstvenoj vrijednosti $\lambda=3$ odgovara svojs. vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}m\\m\\m\end{bmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$, $m\neq 0$

Za $\lambda=6$ imamo

$$\begin{bmatrix}-3&-1&1\\-1&-1&-1\\1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}-3x_1-x_2+x_3&=0 \quad (I)\\-x_1-x_2-x_3&=0 \quad (II)\\x_1-x_2-3x_3&=0 \quad (III)\end{aligned}$$

$(II)+(I)$: $-4x_1-2x_2=0 \quad /:2$

$(III)+(I)\cdot 3$: $-8x_1-4x_2=0$

$x_2=-2x_1 \Rightarrow x_3=x_1$

Svojs. vrijednosti $\lambda=6$ odgovara sv. vektor $\vec{v}=\begin{bmatrix}l\\-2l\\l\end{bmatrix}$, $l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 07.09.2011.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. a) Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0)=1$, $P(1)=4$, $P(2)=15$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

b) Koje od sljedećih binarnih operacija $a\circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a\circ b\overset{def}{=}a-b,\quad a\circ b\overset{def}{=}a^2+b^2,\quad a\circ b\overset{def}{=}2(a+b),\quad a\circ b\overset{def}{=}-a-b.$$

2. a) Metodom matematičke indukcije dokazati da $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$ za svaki prirodan broj n.

b) Neka je dat skup $G=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$ takvo da $a^3\overset{def}{=}e$ i $b^2\overset{def}{=}e$. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova?

3. Diskutovati rješenja sistema u ovisnosti o parametra λ:

$$\begin{aligned}(1+\lambda)x_1+\quad x_2+\quad x_3&=1\\x_1+(1+\lambda)x_2+\quad x_3&=\lambda\\x_1+\quad x_2+(1+\lambda)x_3&=\lambda^2\,.\end{aligned}$$

4. Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A=\begin{bmatrix}3&2\\-2&3\end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeve.

(Rješenja su skinuta sa stranice \pf.unze.ba\nabokov
Za sve uočene greške pisati na **infoarrt@gmail.com**)

Odrediti sve polinome P trećeg stepena koji zadovoljavaju sljedeće uvjete: $P(0)=1$, $P(1)=4$, $P(2)=15$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-5$. (Polinom trećeg stepena je oblika $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$).

Rj.:

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinom trećeg stepena

$P(0)=1 \Rightarrow d=1$

$P(1)=4 \Rightarrow a+b+c+d=4$

$P(2)=15 \Rightarrow 8a+4b+2c+d=15$

$P(-1)=0 \Rightarrow -a+b-c+d=0$

$P(-2)=-5 \Rightarrow -8a+4b-2c+d=-5$

$d=1$

$$a+b+c=3 \quad (a)$$
$$8a+4b+2c=14 \quad (b)$$
$$-a+b-c=-1 \quad (c)$$
$$-8a+4b-2c=-6 \quad (d)$$

$(a)+(c)$: $2b=2$

$b=1$

$$a+c=2$$
$$8a+2c=10$$
$$-a-c=-2$$
$$-8a-2c=-10$$

$= \quad = \quad /:2$

$$a+c=2 \quad (I)$$
$$4a+c=5 \quad (II)$$

$(II)-(I)$: $3a=3$

$a=1 \Rightarrow c=2-1=1$

Polinom trećeg stepena koji zadovoljava date uvjete je $P(x)=x^3+x^2+x+1$

Koje od sljedećih binarnih operacija $a\circ b$ na cijelim brojevima a i b su asocijativne, a koje su komutativne?

$$a\circ b \overset{def}{=} a-b,\quad a\circ b \overset{def}{=} a^2+b^2,\quad a\circ b \overset{def}{=} 2(a+b),\quad a\circ b \overset{def}{=} -a-b$$

Rj:

Za operaciju $\circ$ kažemo da je asocijativna na skupu $\mathbb{Z}$ akko $\forall(a,b,c\in\mathbb{Z})\ (a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$. Operacija je komutativna akko je $a\circ b=b\circ a$ za $\forall a,b\in\mathbb{Z}$.

1° $a\circ b \overset{def}{=} a-b$

$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}\quad (a\circ b)\circ c=(a-b)\circ c=(a-b)-c=a-b-c=a-(b+c)=$

$=a\circ(b+c)$

U ovom slučaju operacija nije asocijativna.

Da li je komutativna?

$a\circ b=a-b=-b+a=-(b-a)=-(b\circ a)$

Operacija nije ni komutativna.

2° $a\circ b \overset{def}{=} a^2+b^2\quad \forall a,b,c\in\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(a^2+b^2)\circ c=(a^2+b^2)^2+c^2=A\\ a\circ(b\circ c)&=a\circ(b^2+c^2)=a^2+(b^2+c^2)^2=B\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\neq B$$ operacija nije asocijativna

$a\circ b=a^2+b^2=b^2+a^2=b\circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

3° $a\circ b \overset{def}{=} 2(a+b)$

$$\left.\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(2(a+b))\circ c=2(2(a+b)+c)=4a+4b+2c\\ a\circ(b+c)&=a\circ(2(b+c))=2(a+2(b+c))=2a+4b+4c\end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a\circ b=2(a+b)=2(b+a)=b\circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

4° $a\circ b \overset{def}{=} -a-b$

$$\left.\begin{aligned}(a\circ b)\circ c&=(-a-b)\circ c=-(-a-b)-c=a+b-c\\ a\circ(b\circ c)&=a\circ(-b-c)=-a-(b-c)=-a-b+c\end{aligned}\right\}$$ operacija nije asocijativna

$a\circ b=-a-b=-b-a=b\circ a \Rightarrow$ operacija je komutativna

Metodom matematičke indukcije dokazati da

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}$$ za svaki prirodan broj n.

Rj: $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$

BAZA INDUKCIJE

$k=1$: $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ Tvrdnja je tačna za broj 1.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve brojeve k od 1 do n.

Tj. pretpostavimo da $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1&k\\0&1\end{bmatrix}$ za $k=1,2,\dots,n$.

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je tvrdnja tačna i za $n+1$.

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{n+1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=}\begin{bmatrix}1&n\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&n+1\\0&1\end{bmatrix}$$ tj. dobili smo

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^{n+1}=\begin{bmatrix}1&n+1\\0&1\end{bmatrix}$$

što je i trebalo dobiti;

ZAKLJUČAK

Tvrdnja je tačna za sve prirodne brojeve.

(#) Neka je dat skup $G=\{e,a,a^2,b,ab,a^2b\}$ na kojem je definisana operacija "obično" množenje $\cdot$. Dokazati da je $(G,\cdot)$ grupa. Da li je grupa Abelova? Napomena: $a^3 \overset{def}{=} e$, $b^2 \overset{def}{=} e$.

Rj.

ZATVORENOST

$\forall x,y\in G \quad x\cdot y\in G$

Napravimo multiplikativnu tabelu za ovaj skup (Kajlijevu tabelu)

$\cdot$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
e	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	ab	a^2b	e	a	a^2
ab	ab	a^2b	b	a	a^2	e
a^2b	a^2b	b	ab	a^2	e	a

$a^2\cdot a^2=a^4=a^3\cdot a=e\cdot a=a$

$a^2\cdot ab=a^3b=e\cdot b=b$

$ba=ab$

$ba^2=a^2b$

$b\cdot ab=ab^2=a$

$ab\cdot b=ab^2=a\cdot e=a$

Iz tabele vidimo da je operacija obično množenje zatvorena.

ASOCIJATIVNOST

$\forall x,y,z\in G \quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

Da je operacija "obično" množenje asocijativno znamo od ranije.

NEUTRALNI ELEMENT

$\forall x\in G \quad \exists e\in G \quad x\cdot e=e\cdot x=x$

Iz tabele vidimo da je neutralni element u ovom slučaju e.

INVERZNI ELEMENT

$\forall x\in G \quad \exists x'\in G \quad x\cdot x'=x'\cdot x=e$

Neutralni element za e je e.
Neutralni element za a je a^2.
Neutralni element za a^2 je a.
Neutralni element za b je b.
Neutralni element za ab je a^2b.
Neutralni element za a^2b je ab.

Svaki element iz G ima neutralni element.

$\Rightarrow (G,\cdot)$ je grupa q.e.d.

KOMUTATIVNOST

$\forall x,y\in G \quad x\cdot y=y\cdot x$

Primjetimo da je tabela simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Operacija $\cdot$ jest komutativna. $(G,\cdot)$ je Abelova grupa

(#) U ovisnosti o parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3&=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3&=\lambda^2.\end{aligned}$$

Rj. Riješimo sistem Cramerovom metodom

$$D=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=}\begin{vmatrix}3+\lambda&1&1\\3+\lambda&1+\lambda&1\\3+\lambda&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}\underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{=\!=}}$$

$$=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\lambda^2$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1&1&1\\\lambda&1+\lambda&1\\\lambda^2&1&1+\lambda\end{vmatrix}\underset{III_k-I_k}{\overset{II_k-I_k}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&0&0\\\lambda&1&1-\lambda\\\lambda^2&1-\lambda^2&1+\lambda-\lambda^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1-\lambda\\1-\lambda^2&1+\lambda-\lambda^2\end{vmatrix}\overset{II_k-I_k}{=\!=}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-\lambda\\1-\lambda^2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda+\lambda-\lambda^3=2\lambda-\lambda^3=\lambda(2-\lambda^2)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&\lambda^2&1+\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k-III_k}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda&1\\-\lambda&\lambda^2&1+\lambda\end{vmatrix}\overset{III_v+I_v}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda&1\\0&\lambda^2+1&2+\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&1\\\lambda^2+1&\lambda+2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda^2+2\lambda-\lambda^2-1)=\lambda(2\lambda-1)$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&\lambda\\1&1&\lambda^2\end{vmatrix}\overset{I_k-II_k}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\-\lambda&1+\lambda&\lambda\\0&1&\lambda^2\end{vmatrix}\overset{II_v+I_v}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&2+\lambda&1+\lambda\\0&1&\lambda^2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda+2&\lambda+1\\1&\lambda^2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)$$

Diskusija

1° za $\lambda\neq 0$ i $\lambda\neq -3$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$$

2° za $\lambda=-3$ imamo $D=0$ ali $D_x\neq 0$ pa sistem nema rješenja

3° za $\lambda=0$ imamo $D=D_x=D_y=D_z=0$ pa riješimo sistem na drugi način.

za $\lambda=0$ sistem postaje

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=1\\x_1+x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

Odavdje vidimo (ZAŠTO?) da sistem za $\lambda=0$ nema rješenja.

(#) Izračunati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ nad poljem kompleksnih brojeva.

Rj.
Prisjetimo se, nenula vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor matrice A ako je $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ za neki skalar λ.
U našem slučaju $\lambda \in \mathbb{C}$ (λ zovemo svojstvena vrijednost).

$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, $\quad A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ gdje je $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on ima netrivijalna rješenja akko $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2+4=9-6\lambda+\lambda^2+4=\lambda^2-6\lambda+13$$

$\lambda^2-6\lambda+13=0$

$D=36-52=-16$

$\lambda_{1,2}=\frac{6\pm 4i}{2}$

Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1=3-2i$ i $\lambda_2=3+2i$

Za $\lambda_1=3-2i$ imamo $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

$$\begin{bmatrix}2i & 2\\ -2 & 2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

tj. $2i\,x_1+2\,x_2=0$

$-2x_1+2ix_2=0 \quad /\cdot i$

$2i\,x_1+2x_2=0$

$-2i\,x_1-2x_2=0$

$2ix_1=-2x_2 \quad /:2$

$ix_1=-x_2$

$x_2=-i\,x_1$

$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}s\\ -is\end{bmatrix}$, $s\neq 0$ svojstveni vektori koji odgovaraju svojstv. vrij. λ_1

Za $\lambda_2=3+2i$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

$$\begin{bmatrix}-2i & 2\\ -2 & -2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

tj. $-2ix_1+2x_2=0 \quad /:2$

$-2x_1-2ix_2=0$

$-ix_1+x_2=0$

$x_2=ix_1$

$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}t\\ it\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_2.